Teoria deformacji
III seria zadań (na poniedziałek 9.03.20, wersja 1.0)

Uwaga ogólna: od tej serii powoli zaczynam zakładać, że wszyscy mieli podstawy schematów. W razie problemów, proszę pisać, chętnie podeślę odpowiednie odnośniki do podręcznika Vakila.

Niech X będzie schematem, zaś F będzie snopem $\mathcal{O}_X$-modułów. Mówimy, że F jest *lokalnie wolny* jeśli istnieje pokrycie $\{U_i\}_i$ schematu X schematami otwartymi takimi, że $F|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus d_i}$ gdzie $d_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Dla $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mówimy, że snop lokalnie wolny F jest *rangi* d jeśli $d_i = d$ dla wszystkich i.
(Uwaga dla ekspertów: precyzyjniej mówiąc, powyżej zdefiniowaliśmy *snop lokalnie wolny lokalnie skończonej rangi.*)

Zadanie 1 LOKALNIE WOLNE SNOPY „=" LOKALNIE STAŁA RANGA
Niech A będzie pierścieniem. Mówimy, że A-moduł M jest *skończenie prezentowany* jeśli istnieje ciąg dokładny $A^{\oplus r_1} \to A^{\oplus r_2} \to M \to 0$ dla pewnych $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Niech M będzie skończenie prezentowanym A-modułem, gdzie A jest **zredukowany**. Dla $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ definiujemy *rangę* M w punkcie $\mathfrak{p}$ jako $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$, gdzie $\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

1. Pokaż, że jeśli A jest Noetherowski, zaś N jest A-modułem, to N jest skończenie generowany wtedy i tylko wtedy, gdy N jest skończenie prezentowany. Podaj przykład, że założenie Noetherowskości jest konieczne.

2. Niech F będzie skończenie generowanym wolnym A-modułem z surjekcją $F \twoheadrightarrow M$. Pokaż, że jądro homomorfizmu $F \twoheadrightarrow M$ jest skończenie generowanym modułem. *Wskazówka: zobacz lemat Schanuela.*

3. Załóżmy, że ranga M w ideale maksymalnym $\mathfrak{m}$ wynosi d. Pokaż, że istnieje surjekcja $A_\mathfrak{m}^{\oplus d} \twoheadrightarrow M_\mathfrak{m}$.

4. Załóżmy, że ranga M w ideale maksymalnym $\mathfrak{m}$ oraz w każdym minimalnym ideale pierwszym $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ wynosi d. Pokaż, że (każda) surjekcja z poprzedniego podpunktu jest izomorfizmem. *Wskazówki: $A_\mathfrak{p} \simeq \kappa(\mathfrak{p})$ oraz $A_\mathfrak{m} \subset \prod \kappa(\mathfrak{p}_i)$, iloczyn po $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{m}$ minimalnych pierwszych.*

5. Niech $F = A^{\oplus d}$ będzie wolnym A-modułem wraz z morfizmem $F \to M$. Załóżmy, że $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$ jest takim punktem, że $F_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m}$ jest izomorfizmem. Pokaż, że istnieje element $f \in A \setminus \mathfrak{m}$ taki, że $F_f \to M_f$ jest izomorfizmem. *Wskazówka: najpierw znajdź f takie, że $F_f \to M_f$ jest surjektywne.*

6. Załóżmy, że ranga M w każdym punkcie $\operatorname{Spec}(A)$ jest równa d. Pokaż, że istnieją elementy $f_1, \ldots, f_r \in A$ takie, że $(f_1, \ldots, f_r) = (1)$ oraz M_{f_i} jest wolnym A_{f_i}-modułem rangi d dla każdego $i = 1, 2, \ldots, r$. Zatem M jest modułem cięć dla pewnego snopa lokalnie wolnego rangi d na $\operatorname{Spec}(A)$.

Rozwiązanie.
Przypomnienie rozwiązania podpunktów 3-4.
3. Załóżmy, że obrazy elementów $m_1, \ldots, m_d \in M_\mathfrak{m}$ w $M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}M_\mathfrak{m}$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}M_\mathfrak{m}$ nad $A/\mathfrak{m}$. Niech $N \subset M_\mathfrak{m}$ będzie $A_\mathfrak{m}$-podmodułem generowanym przez $m_1, \ldots, m_d$. Wtedy $M_\mathfrak{m} = N + \mathfrak{m}M_\mathfrak{m}$, więc z lematu Nakayamy mamy $M_\mathfrak{m} = N$.
4. Niech $A_\mathfrak{m}^{\oplus d} = F \to M_\mathfrak{m}$ będzie surjekcją z poprzedniego podpunktu i niech K będzie jej jądrem, czyli mamy krótki ciąg dokładny $0 \to K \to F \to M_\mathfrak{m} \to 0$.

Niech $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ będzie minimalnym ideałem pierwszym. Lokalizując ciąg powyżej otrzymujemy kcd

$$0 \to K_\mathfrak{p} \to F_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to 0. \tag{1}$$

Pierścień $A_\mathfrak{p}$ jest zredukowany jako lokalizacja zredukowanego oraz $\operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\}$, bo $\mathfrak{p}$ jest minimalny. Zatem

$$0 = \operatorname{Nil}(A_\mathfrak{p}) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p})} \mathfrak{q} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}.$$

To dowodzi, że $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = 0$. W szczególności $(-)_\mathfrak{p} = \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$. Zatem (1) można też zapisać jako

$$0 \to K \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \to F \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \to M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \to 0.$$

Przestrzenie liniowe $F \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \to M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ mają z założenia wymiar $d < \infty$, więc ich surjekcja jest izomorfizmem. To dowodzi, że $K \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = 0$ dla każdego minimalnego ideału pierwszego $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{m})$.

Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór minimalnych ideałów pierwszych $A_\mathfrak{m}$. Skoro $A_\mathfrak{m}$ jest zredukowany, to $0 = \operatorname{Nil}(A_\mathfrak{m}) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}} \mathfrak{q}$. Zatem odwzorowanie

$$A_\mathfrak{m} \to \prod_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}} A_\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$$

jest injekcją dla każdego $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}$. Ale $\kappa(\mathfrak{q}) = \operatorname{Frac}(A_\mathfrak{m}/\mathfrak{q})$ oraz naturalne odwzorowanie $A_\mathfrak{m}/\mathfrak{q} \to \operatorname{Frac}(A_\mathfrak{m}/\mathfrak{q})$ jest injekcją. Zatem również naturalne odwzorowanie

$$A_\mathfrak{m} \to \prod_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}} \kappa(\mathfrak{q})$$

jest injekcją. Biorąc sumy proste, również odwzorowanie

$$F \to \prod_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}} F \otimes \kappa(\mathfrak{q})$$

jest injekcją. Ale K leży w jądrze tego odwzorowania, więc $K = 0$.

Zadanie 2 Grassmannian

Niech K będzie pierścieniem. Niech V będzie ustalonym wolnym K-modułem. Definiujemy funktor $\mathrm{Gr}(d, V)\colon \mathrm{Sch}_K^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ poprzez

$$\mathrm{Gr}(d, V)(S) = \{V \otimes_K \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow E \mid E \text{ lokalnie wolny snop rangi } d\} /\mathrm{iso},$$

gdzie dwie surjekcje $\pi_1, \pi_2\colon V \otimes_K \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow E_1, E_2$ są izomorficzne jeśli istnieje izomorfizm $\varphi_{12}\colon E_1 \to E_2$ taki, że $\pi_2 = \varphi_{12} \circ \pi_1$. Wybierzmy bazę $(e_i)_{i \in I}$ modułu V.

1. Załóżmy, że $K = \Bbbk$ jest ciałem skończonym o q elementach. Ile punktów ma $\mathrm{Gr}(d, V)(\mathrm{Spec}(\Bbbk))$?

2. Niech $\Bbbk$ będzie ciałem. Pokaż, że dla każdego elementu $[V \otimes_K \Bbbk \to E] \in \mathrm{Gr}(d, V)(\mathrm{Spec}(\Bbbk))$ istnieje taka krotka $e_{i_1}, \ldots, e_{i_d}$, że indukowane odwzorowanie $\bigoplus_{j=1}^d \Bbbk e_{i_j} \to E$ jest izomorfizmem.

3. Zdefiniujmy podfunktor $\mathrm{Gr}^{i_1, \ldots, i_d}(d, V) \subset \mathrm{Gr}(d, V)$ wzorem

$$\mathrm{Gr}^{i_1,\ldots,i_d}(d, V)(S) = \left\{ V \otimes_K \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow E \;\middle|\; \text{indukowane odwzorowanie } \bigoplus_{j=1}^{d} \mathcal{O}_S\, e_{i_j} \to E \text{ jest izomorfizmem} \right\} /\mathrm{iso}.$$

   Pokaż, że $\mathrm{Gr}^{i_1,\ldots,i_d}(d, V)$ jest reprezentowany przez przestrzeń afiniczną wymiaru $d \cdot (\dim V - d)$.

4. Pokaż, że $\mathrm{Gr}^{i_1,\ldots,i_d}(d, V) \to \mathrm{Gr}(d, V)$ jest otwartym włożeniem i że $\coprod_{\{i_1,\ldots,i_d\} \subset I} \mathrm{Gr}^{i_1,\ldots,i_d}(d, V) \to \mathrm{Gr}(d, V)$ jest otwartym pokryciem.

5. Pokaż, że $\mathrm{Gr}(d, V)$ jest snopem Zariskiego i wywnioskuj, że $\mathrm{Gr}(d, V)$ jest reprezentowany.

Zadanie 3 Zadanie dodatkowe, włożenie Plückera

Niech K będzie pierścieniem. Niech V będzie ustalonym wolnym K-modułem.

1. Niech E będzie snopem lokalnie wolnym rangi d na schemacie X. Pokaż, że $\Lambda^d E$ jest snopem lokalnie wolnym rangi 1 i użyj tej obserwacji do zdefiniowania przekształcenia Plückera z $\mathrm{Gr}(d, V)$ do $\mathrm{Gr}(1, \Lambda^d V) = \mathbb{P}(\Lambda^d V)$.

2. Pokaż, że przekształcenie Plückera jest domkniętą immersją.