

Teoria deformacji

III seria zadań (na poniedziałek 9.03.20, wersja 1.0)

Uwaga ogólna: od tej serii powoli zaczynam zakładać, że wszyscy mieli podstawy schematów. W razie problemów, proszę pisać, chętnie podeślę odpowiednie odnośniki do podręcznika Vakila.

Niech X będzie schematem, zaś F będzie snopem \mathcal{O}_X -modułów. Mówimy, że F jest *lokalnie wolny* jeśli istnieje pokrycie $\{U_i\}_i$ schematu X schematami otwartymi takimi, że $F|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus d_i}$ gdzie $d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dla $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mówimy, że snop lokalnie wolny F jest *rangi d* jeśli $d_i = d$ dla wszystkich i .

(Uwaga dla ekspertów: precyzyjniej mówiąc, powyżej zdefiniowaliśmy *snop lokalnie wolny lokalnie skończonej rangi*.)

Zadanie 1 LOKALNIE WOLNE SNOPIY „=” LOKALNIE STAŁA RANGA

Niech A będzie pierścieniem. Mówimy, że A -moduł M jest *skończenie prezentowany* jeśli istnieje ciąg dokładny $A^{\oplus r_1} \rightarrow A^{\oplus r_2} \rightarrow M \rightarrow 0$ dla pewnych $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Niech M będzie skończenie prezentowanym A -modulem, gdzie A jest *zredukowany*. Dla $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ definiujemy *rangę M* w punkcie \mathfrak{p} jako $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$, gdzie $\kappa(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

1. Pokaż, że jeśli A jest Noetherowski, zaś N jest A -modulem, to N jest skończenie generowany wtedy i tylko wtedy, gdy N jest skończenie prezentowany. Podaj przykład, że założenie Noetherowskości jest konieczne.
2. Niech F będzie skończenie generowanym wolnym A -modulem z surjekcją $F \rightarrow M$. Pokaż, że jądro homomorfizmu $F \rightarrow M$ jest skończenie generowanym modulem. *Wskazówka: zobacz lemat Schanuela.*
3. Załóżmy, że ranga M w ideale maksymalnym \mathfrak{m} wynosi d . Pokaż, że istnieje surjekcja $A_{\mathfrak{m}}^{\oplus d} \rightarrow M_{\mathfrak{m}}$.
4. Załóżmy, że ranga M w ideale maksymalnym \mathfrak{m} oraz w każdym minimalnym ideale pierwszym $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ wynosi d . Pokaż, że (każda) surjekcja z poprzedniego podpunktu jest izomorfizmem. *Wskazówki: $A_{\mathfrak{p}} \simeq \kappa(\mathfrak{p})$ oraz $A_{\mathfrak{m}} \subset \prod \kappa(\mathfrak{p}_i)$, iloczyn po $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{m}$ minimalnych pierwszych.*
5. Niech $F = A^{\oplus d}$ będzie wolnym A -modulem wraz z morfizmem $F \rightarrow M$. Załóżmy, że $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A)$ jest takim punktem, że $F_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{\mathfrak{m}}$ jest izomorfizmem. Pokaż, że istnieje element $f \in A \setminus \mathfrak{m}$ taki, że $F_f \rightarrow M_f$ jest izomorfizmem. *Wskazówka: najpierw znajdź f takie, że $F_f \rightarrow M_f$ jest surjektywne.*
6. Załóżmy, że ranga M w każdym punkcie $\text{Spec}(A)$ jest równa d . Pokaż, że istnieją elementy $f_1, \dots, f_r \in A$ takie, że $(f_1, \dots, f_r) = (1)$ oraz M_{f_i} jest wolnym A_{f_i} -modulem rangi d dla każdego $i = 1, 2, \dots, r$. Zatem M jest modulem cięć dla pewnego snopa lokalnie wolnego rangi d na $\text{Spec}(A)$.

Zadanie 2 GRASSMANNIAN

Niech K będzie pierścieniem. Niech V będzie ustalonym wolnym K -modulem. Definiujemy functor $\text{Gr}(d, V): \text{Sch}_K^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ poprzez

$$\text{Gr}(d, V)(S) = \{V \otimes_K \mathcal{O}_S \rightarrow E \mid E \text{ lokalnie wolny snop rangi } d\} / \text{iso},$$

gdzie dwie surjekcje $\pi_1, \pi_2: V \otimes_K \mathcal{O}_S \rightarrow E_1, E_2$ są izomorficzne jeśli istnieje izomorfizm $\varphi_{12}: E_1 \rightarrow E_2$ taki, że $\pi_2 = \varphi_{12} \circ \pi_1$. Wybierzmy bazę $(e_i)_{i \in I}$ modułu V .

1. Załóżmy, że $K = \mathbb{k}$ jest ciałem skończonym o q elementach. Ile punktów ma $\text{Gr}(d, V)(\text{Spec}(\mathbb{k}))$?
2. Niech \mathbb{k} będzie ciałem. Pokaż, że dla każdego elementu $[V \otimes_K \mathbb{k} \rightarrow E] \in \text{Gr}(d, V)(\text{Spec}(\mathbb{k}))$ istnieje taka krotka e_{i_1}, \dots, e_{i_d} , że indukowane odwzorowanie $\bigoplus_{j=1}^d \mathbb{k}e_{i_j} \rightarrow E$ jest izomorfizmem.
3. Zdefiniujmy podfunctor $\text{Gr}^{i_1, \dots, i_d}(d, V) \subset \text{Gr}(d, V)$ wzorem

$$\text{Gr}^{i_1, \dots, i_d}(d, V)(S) = \left\{ V \otimes_K \mathcal{O}_S \rightarrow E \mid \text{indukowane odwzorowanie } \bigoplus_{j=1}^d \mathcal{O}_S e_{i_j} \rightarrow E \text{ jest izomorfizmem} \right\} / \text{iso}.$$

Pokaż, że $\text{Gr}^{i_1, \dots, i_d}(d, V)$ jest reprezentowany przez przestrzeń afiniczną wymiaru $d \cdot (\dim V - d)$.

4. Pokaż, że $\text{Gr}^{i_1, \dots, i_d}(d, V) \rightarrow \text{Gr}(d, V)$ jest otwartym włożeniem i że $\prod_{\{i_1, \dots, i_d\} \subset I} \text{Gr}^{i_1, \dots, i_d}(d, V) \rightarrow \text{Gr}(d, V)$ jest otwartym pokryciem.
5. Pokaż, że $\text{Gr}(d, V)$ jest snopem Zariskiego i wywnioskuj, że $\text{Gr}(d, V)$ jest reprezentowany.

Zadanie 3 ZADANIE DODATKOWE, WŁOŻENIE PLÜCKERA

Niech K będzie pierścieniem. Niech V będzie ustalonym wolnym K -modulem.

1. Niech E będzie snopem lokalnie wolnym rangi d na schemacie X . Pokaż, że $\Lambda^d E$ jest snopem lokalnie wolnym rangi 1 i użyj tej obserwacji do zdefiniowania przekształcenia Plückera z $\text{Gr}(d, V)$ do $\text{Gr}(1, \Lambda^d V) = \mathbb{P}(\Lambda^d V)$.
2. Pokaż, że przekształcenie Plückera jest domkniętą immersją.