Teoria deformacji
II seria zadań (na poniedziałek 2.03.20, wersja 1.03)

Komentarze ogólne: na najbliższych zajęciach nie można deklarować zadania dodatkowego z serii 0. Bieżąca seria jest nadal o podstawach funktorów, ale to już ostatnia tak ogólna. Jak zwykle, $\Bbbk$ jest ciałem.

Zadanie 1 Grupy jako funktory
Niech $F\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ będzie funktorem reprezentowanym przez schemat afiniczny X.

1. Załóżmy, że F jest *funktorem grupowym* tzn., że mamy ustalony funktor $\widetilde{F}\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$ taki, że F jest izomorficzny z $\widetilde{F}$ złożonym z zapominaniem do zbiorów. Pokaż, że X jest schematem grupowym.
Uwaga: Tutaj Grp *oznacza kategorię grup, a całe założenie sprowadza się do powiedzenia, że na każdym* $F(\mathrm{Spec}(A))$ *mamy strukturę grupy.*

2. Znajdź schematy grupowe reprezentujące funktory. Schematy w punktach 1. i 2. znaleźliśmy poprzednim razem, pozostaje wypisać, jak wygląda mnożenie
   - $\widetilde{F}(\mathrm{Spec}(A)) = (A, +)$. Nazywamy ją $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$.
   - $\widetilde{F}(\mathrm{Spec}(A)) = \{a \in A \mid a \text{ odwracalny}\}$ z mnożeniem. Nazywamy ją $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

Zadanie 2 Obiekty uniwersalne = reprezentowalność
Niech C będzie kategorią (np. $C = \mathrm{Aff}$), zaś $F\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ będzie funktorem.

1. Załóżmy, że F jest reprezentowany przez obiekt X. Pokaż, że istnieje element $U \in F(X)$ taki, że dla każdej pary $S \in C$, $u \in F(S)$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f\colon S \to X$ taki, że $F(f)\colon F(X) \to F(S)$ posyła U na u.

2. Załóżmy, że obiekt X' z elementem U' ma własność podaną w punkcie pierwszym, tzn. dla każdej pary $S \in C$, $u \in F(S)$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f\colon S \to X'$ taki, że indukowane odwzorowanie $F(f)\colon F(X') \to F(S)$ posyła U' na u. Pokaż, że X' reprezentuje F.

3. Załóżmy, że X' spełnia warunek z punktu drugiego ale bez założenia jedyności. Pokaż, że nie wynika z tego, że X' reprezentuje F. *Wskazówka: weź funktor reprezentowalny przez* X *i* $X' = \mathbb{A}^1 \times X$.

Zadanie 3 Koreprezentowalny funktor
Niech $S, X, Y \in \mathrm{Aff}$ oraz $i_X\colon S \to X$, $i_Y\colon S \to Y$ będą ustalonymi morfizmami. Pokaż, że istnieje schemat afiniczny Z taki, że

$$\mathrm{Hom}(Z, -) \simeq \mathrm{Hom}(X, -) \times_{\mathrm{Hom}(S,-)} \mathrm{Hom}(Y, -);$$

pokaż; że mamy naturalne odwzorowania z X i Y i że są one zgodne na S. Schemat Z nazywamy *pushoutem* X i Y względem S i oznaczamy $X \sqcup_S Y$. *Tutaj* $(-) \times (-)$ *oznacza iloczyn włóknisty zbiorów, czyli pary elementów zgodne po przejściu do* $\mathrm{Hom}(S, -)$. *To zadanie typu „zrozum treść".*

Zadanie 4 Przestrzeń styczna do funktora
Niech $F\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ będzie funktorem. Wtedy dla dowolnych $X, Y, S \in \mathrm{Aff}$ wraz z morfizmami $S \to X$, $S \to Y$ mamy naturalne odwzorowanie

$$F(X \sqcup_S Y) \to F(X) \times_{F(S)} F(Y) \qquad (\star)$$

Niech $\pi\colon \mathrm{Spec}(\Bbbk) \to \mathrm{Spec}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ będzie naturalnym odwzorowaniem.

1. Pokaż, że jeśli F jest reprezentowalny, to odwzorowanie $(\star)$ jest bijekcją dla dowolnych X, Y, S.

2. Załóżmy, że zachodzą poniższe warunki
   (a) odwzorowanie $(\star)$ jest surjekcją ilekroć S, X, Y są lokalnymi Artinowskimi $\Bbbk$-algebrami oraz $S \to X$, $S \to Y$ są domkniętymi włożeniami $\Bbbk$-algebr.
   (b) odwzorowanie $(\star)$ jest bijekcją jeśli $(S, Y, S \to Y) = (\mathrm{Spec}(\Bbbk), \mathrm{Spec}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2), \pi)$ zaś X jest Artinowską lokalną $\Bbbk$-algebrą z domkniętym włożeniem $S \to X$.

   Ustalmy punkt $x \in F(\Bbbk)$. Imitując zadanie o przestrzeni stycznej z poprzedniej serii pokaż, że na zbiorze

   $$T_xF := \{v \in F(\mathrm{Spec}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2)) \mid F(\pi)(v) = x\}$$

   mamy naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad $\Bbbk$. Nazywamy ją *przestrzenią styczną do funktora* F *w* x.

3. Załóżmy, że F i G są funktorami i $\Phi\colon F \to G$ jest naturalną transformacją. Pokaż, że indukuje ona przekształcenie *liniowe* $T_xF \to T_{\Phi(x)}G$, które oznaczamy $(d\Phi)_x$.

Zadanie 5
Ustalmy d. Niech $\mathrm{BasedAlg}_d$ będzie zdefiniowane jak na wykładzie i niech Alg_d będzie zdefiniowane jak w zadaniu 4, czyli $\mathrm{Alg}_d(\mathrm{Spec}(A)) = \{\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) \mid B \text{ wolny } A\text{-moduł rangi } d\}/\mathrm{iso}$. Niech $\iota\colon \mathrm{BasedAlg}_d \to \mathrm{Alg}_d$ będzie funktorem zapominania. Pokaż, że dla każdej $[A, \varphi] \in \mathrm{BasedAlg}_d(\Bbbk)$ odwzorowanie liniowe $d\iota\colon T_{[A,\varphi]}\,\mathrm{BasedAlg}_d \to T_{[A]}\,\mathrm{Alg}_d$ jest surjektywne.