Teoria deformacji
XV seria zadań (na poniedziałek 8.06, wersja 1.00)

Pozostały zadania 3. i 4. z serii XIV. Bardzo zachęcam do zrobienia ich obu, zwłaszcza, że kluczowe technicznie kawałki dla 3. już zostały zrobione w 1., 2. Potencjalnie poniżej są jakieś problemy z konwencjami, więc proszę o informacje w razie gdyby tak było!

Zadanie 1
Niech $\mathbb{k}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $S = \mathbb{k}[x, y]$ pierścieniem wielomianów i $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} = \mathrm{Proj}(S)$. Niech $U_0 = (x \neq 0)$ oraz $U_1 = (y \neq 0)$ będą standardowym pokryciem. Niech $U_{10} = U_0 \cap U_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{k}[t^{\pm 1}])$, gdzie $t = x/y$.

1. Dla których $a, b \in \mathbb{Z}$ wiązka $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ na $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$ jest stabilna? A semistabilna?

2. Niech snop lokalnie wolny E rangi n będzie zadany przez wybranie kocyklu będącego macierzą $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}[t^{\pm 1}])$ traktowaną jako funkcja przejścia z trywializacji na U_1 do U_0. Niech $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}[t^{-1}])$ oraz $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}[t])$. Pokaż, że snop lokalnie wolny zadany kocyklem $B \cdot A \cdot C$ jest izomorficzny z E.

3. Niech snop E_λ rangi 2 będzie zadany macierzą
$$\begin{pmatrix} t^n & \lambda t^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
gdzie $\lambda \in \mathbb{k}$. Uzasadnij, że $E_0 \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n)$. Pokaż, że dla $\lambda \neq 0$ istnieją macierze B i C jak w poprzednim podpunkcie takie, że BAC jest macierzą diagonalną o wyrazach t i t^{n-1}. Wywnioskuj, że $E_\lambda \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-(n-1))$.

4. Skonstruuj wiązkę $\mathcal{E}$ na $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}$ taką, że $\mathcal{E}|_{p^{-1}(\lambda)} \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-(n-1))$ dla $\lambda \neq 0$ oraz $\mathcal{E}|_{p^{-1}(0)} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n)$ gdzie $p \colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}$ jest rzutowaniem.

5. Wywnioskuj, że $\mathcal{E} \in \mathrm{Pic}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{k}})$ pokazuje, że naiwny funktor Pic nie jest reprezentowalny. Jak ten argument zmieniłby się, gdybyśmy rozważali tylko wiązki semistabilne? *Wskazówka: niereprezentowalność jak w zadaniu I.4.*

Informacja: Każdą macierz odwracalną A o wyrazach z $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k}[t^{\pm 1}])$ można zapisać w postaci $A = B \cdot \Delta \cdot C$, gdzie $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}[t^{-1}])$, Δ jest macierzą diagonalną o wyrazach ze zbioru $\{t^a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, zaś $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}[t])$. Ponadto każdy snop lokalnie wolny skończonej rangi na $\mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}$ jest wolny. Zatem każdy snop lokalnie wolny rangi n na $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}$ jest postaci $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(a_i)$.