Teoria deformacji
XIV seria zadań (na poniedziałek 1.06, wersja 1.11)

Zadanie 1 Działanie funktora grupowego na funktorze
Wszystkie schematy w tym zadaniu są nad $\Bbbk$, które jest ciałem. Niech $G := \mathrm{GL}_n$ będzie podrozmaitością otwartą w przestrzeni afinicznej macierzy nad $\Bbbk$, zadaną nieznikaniem wyznacznika.

1. Pokaż, że GL_n reprezentuje funktor grupowy $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$ zadany przez
$$A \mapsto \{\text{macierze odwracalne } n \times n \text{ o wyrazach z } A\}.$$
(Funktory grupowe pojawiły się w zadaniu II.1)

2. Pokaż, że (zwykłe) działanie grupy $\mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk) \times \mathbb{P}^n(\Bbbk) \to \mathbb{P}^n(\Bbbk)$ zadane przez
$$(a_{ij})_{i,j=0,1,\ldots,n} \circ [x_0 : \ldots : x_n] = \left[\sum_{i=0}^n a_{0i}x_i, \sum_{i=0}^n a_{1i}x_i, \ldots, \sum_{i=0}^n a_{n+1,i}x_i\right]$$
pochodzi od działania $\mathrm{GL}_{n+1} \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. *Wskazówka: są co najmniej dwa sposoby: zdefiniować transformację funktorów albo policzyć bezpośrednio.*

3. Ustalmy wielomian $p \in \mathbb{Q}[t]$ i niech $Z \subset_{cl} \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ będzie schematem domkniętym o wielomianie Hilberta p. Niech $g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk)$ i niech $\mu_g \colon \mathbb{P}^n_{\Bbbk} \to \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ będzie mnożeniem przez g. Niech $gZ \subset \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ oznacza schemat domknięty zadany przez złożenie
$$Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\Bbbk} \xrightarrow[\simeq]{\mu_g} \mathbb{P}^n_{\Bbbk}.$$
Pokaż, że to zadaje działanie $\mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk)$ na $\mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^n_{\Bbbk})(\Bbbk)$.

4. Niech
$$B(\Bbbk) = \begin{pmatrix} * & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & * \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk)$$
Dla $p = 2$ i $n = 2$ znajdź wszystkie punkty stałe działania $B(\Bbbk)$ na $\mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^n_{\Bbbk})(\Bbbk)$. *Wskazówka: z zadania I.4 wiemy, jak wyglądają $\Bbbk$-punkty* Hilb *jako abstrakcyjne algebry.*

5. Pokaż, że powyższe działanie $\mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk)$ na $\mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^n_{\Bbbk})(\Bbbk)$ pochodzi od działania GL_{n+1} na $\mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^n_{\Bbbk})$. *Wskazówka: analogicznie do działania* $\mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk)$ *zdefiniuj działanie* $\mathrm{GL}_{n+1}(A)$ *dla każdego* $A \in \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}$. *Pokaż, że to zadaje naturalną transformację funktorów* $\mathrm{GL}_{n+1} \times \mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^n_{\Bbbk}) \to \mathrm{Hilb}^p(\mathbb{P}^n_{\Bbbk})$. *Tu już trzeba funktorialne i nie da się bezpośrednio :)*

Zadanie 2 metoda rozpraszania (ang. *distraction*) Hartshorne'a
Niech $\Bbbk$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech I będzie ideałem jednomianowym w $S = \Bbbk[x, y]$ takim, że S/I jest Artinowski. Ustalmy nieskończone ciągi $(p_i)_{i=0,1\ldots}$ oraz $(q_i)_{i=0,1,\ldots}$ parami różnych elementów $\Bbbk$. Dla jednomianu $m = x^a y^b \in S$ definiujemy element pierścienia $S[t]$ zadany wzorem
$$m(t) := (x - t \cdot p_0)(x - t \cdot p_1) \cdot \ldots (x - t \cdot p_{a-1})(y - t \cdot q_0)(y - t \cdot q_1) \ldots (y - t \cdot q_{b-1}).$$
Wreszcie dla ideału jednomianowego $I = (m_1, \ldots, m_n) \subset S$ definiujemy ideał
$$J := (m_1(t), \ldots, m_n(t))S[t].$$
Pokaż, że $A := S[t]/J$ jest wolnym $\Bbbk[t]$-modułem o bazie złożonej z jednomianów niezawartych w I. Przykładowe kroki:

1. Pokaż, że $A/(t) \simeq S/I$.

2. Pokaż, że algebra A jest rozpinana jako $\Bbbk[t]$-moduł przez jednomiany ze zbioru $S \setminus I$, co indukuje surjekcję $\Bbbk[t]$-modułów $\pi\colon \Bbbk[t]^{\oplus d} \twoheadrightarrow A$, gdzie $d = \dim_{\Bbbk} S/I$.

3. Pokaż, że dla każdego $\lambda \in \Bbbk \setminus \{0\}$ odwzorowanie $S \to A/(t-\lambda)$ jest surjekcją której jądro składa się dokładnie z funkcji znikających we wszystkich punktach $(\lambda p_a, \lambda q_b)$ takich, że $x^a y^b \notin I$. *Wskazówka: np. pokaż bezpośrednio, że jądro jest zawarte z zbiorze funkcji znikających w tych punktach i abstrakcyjnie wywnioskuj, że musi być równe, korzystając z poprzedniego podpunktu.*

4. Wywnioskuj, że algebra $A/(t-\lambda)$ jest izomorficzna z produktem d kopii ciała $\Bbbk$ i że lokalizacja A_t jest wolnym $\Bbbk[t^{\pm 1}]$-modułem rangi d. *Wskazówka: zadanie III.1.*

5. Wywnioskuj, że surjekcja π jest izomorfizmem.

Uwaga: metoda rozpraszania działa tak samo dla ideałów jednomianowych w $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, tylko notacja staje się mniej przyjemna.

Zadanie 3

Niech ciało $\Bbbk$ będzie algebraicznie domknięte i niech $[R] \in \mathrm{Hilb}_d(\mathbb{P}^2_{\Bbbk})(\Bbbk)$ będzie punktem stałym dla działania grupy Borela $B(\Bbbk)$, jak w zadaniu 1 (zauważmy, że żeby ustalić $B(\Bbbk)$ musieliśmy wybrać współrzędne x_0, x_1, x_2 na $\mathbb{P}^2_{\Bbbk}$). Niech $R \subset_{cl} \mathbb{P}^2_{\Bbbk}$ będzie odpowiadającym mu podschematem skończonym.

1. Pokaż, że $|\operatorname{Supp}(R)| = \{[1 : 0 : 0]\}$. Pokaż, że we współrzędnych lokalnych na podschemacie afinicznym $(x_0 \neq 0)$ ideał I_R jest jednomianowy. *Wskazówka: w grupie $B(\Bbbk)$ siedzą też macierze diagonalne.*

2. Pokaż, że rozproszenie Hartshorne'a indukuje odwzorowanie $\mathbb{A}^1 \to \mathrm{Hilb}_d(\mathbb{P}^2_{\Bbbk})$, którego obraz zawiera $[R]$ i przecina podzbiór otwarty $\mathrm{Hilb}^{sm}_d(\mathbb{P}^2_{\Bbbk})$. Wywnioskuj, że $[R]$ leży w domknięciu $\mathrm{Hilb}^{sm}_d(\mathbb{P}^2_{\Bbbk})$.

Zadanie 4 Zadanie dodatkowe

Niech X będzie całkowitą gładką krzywą nad algebraicznie domkniętym ciałem $\Bbbk$. Pokaż, że $\mathrm{Hilb}_d(X)$ jest całkowity i gładki wymiaru d dla każdego $d \geqslant 1$. Przykładowe kroki:

1. Pokaż, że każdy domknięty podschemat skończony X jest izomorficzny z $\bigsqcup_{i=1}^{s} \operatorname{Spec}(\Bbbk[x]/(x^{n_i}))$ dla pewnych s i $n_1, n_2, \ldots, n_s$.

2. Pokaż, że $\mathrm{Hilb}_d(X)$ jest nieprzywiedlny wymiaru d. *Wskazówka: rozpraszanie Hartshorne'a.*

3. Pokaż, że każdy $\Bbbk$-punkt schematu $\mathrm{Hilb}_d(X)$ jest regularny i wywnioskuj, że $\mathrm{Hilb}_d(X)$ jest gładki.