Teoria deformacji
XIII seria zadań (na poniedziałek 25.05, wersja 1.22)

W dzisiejszej serii jest trochę spisanej teorii, żeby powtórzyć i uporządkować materiał z wykładu.

Stopień wiązki na krzywej.

Na wykładzie wprowadziliśmy ad hoc *stopień* snopa odwracalnego L na gładkiej krzywej rzutowej C. Poniżej umieszczam własności, z których można korzystać bez dowodzenia:

1. $\deg(L_1 \otimes L_2) = \deg(L_1) + \deg(L_2)$ dla L_1, L_2 odwracalnych,
2. jeśli $0 \neq s \in H^0(C, L)$ jest dowolnym cięciem, to $\deg(L) = \dim H^0(V(s))$, gdzie $V(s)$ jest podschematem znikania s, czyli największym podschematem domkniętym $\Gamma \subset C$ takim, że $s|_\Gamma = 0$. Przykładowo, $\deg(\mathcal{O}_C) = 0$, bo $1 \in H^0(C, \mathcal{O}_C)$ nie znika nigdzie. Formalnie, Γ istnieje, bo s odpowiada $s\colon \mathcal{O}_C \to L$ i na wykładzie pokazaliśmy, że funktor $S \mapsto \{j\colon S \to C \mid j^*s = 0\}$ jest reprezentowany przez domknięty podschemat.
3. każdy snop odwracalny L na C można zapisać w postaci $L = L_1 \otimes L_2^{-1}$, gdzie snopy odwracalne L_1 i L_2 mają nieznikające cięcia globalne. (co wynika z twierdzenia Serra)

Odnośnik: np. [Rozdział 18.4, Vakil]. Na marginesie: założenie gładkości nie jest konieczne, ale wprowadzamy je dla ułatwienia życia i dlatego, że będziemy rozważać stopnie tylko dla gładkich krzywych.

Zadanie 1

1. Oblicz $\deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\Bbbk}}(n))$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.
2. Niech $C \subset \mathbb{P}^2_{\Bbbk}$ będzie gładką krzywą zadaną wielomianem stopnia d. Oblicz $\deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_C)$.

Zadanie 2
Niech $\varphi\colon C_1 \to C_2$ będzie skończonym morfizmem całkowitych krzywych rzutowych. Załóżmy, że C_2 jest gładka. Niech $\eta_1 \in C_1$ będzie punktem generycznym i niech $\eta_2 = \varphi(\eta_1)$.

1. Pokaż, że φ jest płaski.
Wskazówka: z definicji. Pierścienie lokalne C_2 są DVRami.
2. Wywnioskuj, że φ jest surjektywny i że η_2 jest punktem generycznym krzywej C_2. *Wskazówka: IV.3.6 oraz „morfizm skończony jest rzutowy" – dlaczego?.*
3. Oznaczmy przez d stopień rozszerzenia ciał $\kappa(\eta_2) \to \kappa(\eta_1)$. Pokaż, że $\varphi_*\mathcal{O}_{C_1}$ jest lokalnie wolnym $\mathcal{O}_{C_2}$-modułem rangi d. Liczbę d nazywamy *stopniem* przekształcenia φ i oznaczamy $\deg(\varphi)$.
4. Pokaż, dla każdego $x \in C_2$ algebra cięć globalnych włókna $\varphi^{-1}(x) = x \times_{C_2} C_1$ jest d-wymiarową przestrzenią liniową nad $\kappa(x)$.
5. Niech L będzie wiązką liniową nad C_2. Pokaż, że $\deg(\varphi^*L) = \deg(\varphi) \cdot \deg(L)$.
Wskazówka: z addytywności stopnia wystarczy rozważyć przypadek, gdy L ma niezerowe cięcie globalne.
6. Załóżmy, że ciało bazowe $\Bbbk$ jest charakterystyki p. Niech $F\colon C_1 \to C_1$ będzie przekształceniem Frobeniusa. Pokaż, że jego stopień to p.

Uwaga ogólna: każdy niestały morfizm φ jest skończony (bo jest rzutowy i quasi-skończony, czyli znowu z tw. Zariskiego), więc założenie skończoności jest a posteriori równoważne niestałości φ.

Zadanie 3
Niech A będzie Artinowską lokalną $\Bbbk$-algebrą z ciałem ilorazowym $\Bbbk$. Niech R będzie skończenie generowaną A-algebrą. Niech $f \in R$. Pokaż, że pierwszy z poniższych warunków implikuje drugi

1. R jest płaską A-algebrą oraz obraz elementu f w $R \otimes_A \Bbbk$ jest niedzielnikiem zera.
2. element f jest niedzielnikiem zera w R oraz R/f jest płaską A-algebrą.

Wskazówka, jeden ze sposobów: wszystkie warunki można sprawdzać po lokalizacji R w ideałach maksymalnych. Patrz też wniosek z lokalnego kryterium płaskości, wykład z 9 marca. Są też inne sposoby.

Zadanie 4
Niech A będzie Artinowską lokalną $\mathbb{k}$-algebrą z ciałem ilorazowym $\mathbb{k}$. Niech R będzie skończenie generowaną A-algebrą. Niech $f_1, \ldots, f_s \in R$. Pokaż, że pierwszy z poniższych warunków implikuje drugi

1. R jest płaską A-algebrą oraz obrazy elementów $f_1, \ldots, f_s$ w $R \otimes_A \mathbb{k}$ tworzą ciąg regularny.
2. Elementy $f_1, \ldots, f_s$ tworzą ciąg regularny i $R/(f_1, \ldots, f_s)$ jest płaską A-algebrą.

Zadanie 5
Niech $Z \subset_{cl} Y$ będą schematami afinicznymi nad ciałem $\mathbb{k}$. Załóżmy, że Z jest zupełnym przecięciem w Y.

1. Niech A będzie Artinowską lokalną $\mathbb{k}$-algebrą z ciałem ilorazowym $\mathbb{k}$. Niech $\mathcal{Z} \subset_{cl} Y \times_{\mathbb{k}} \operatorname{Spec}(A)$ będzie płaskim schematem nad $\operatorname{Spec}(A)$ takim, że $\mathcal{Z}|_{\mathrm{pt}} = Z$. Pokaż, że $\mathcal{Z}$ jest zupełnym przecięciem w $Y \times_{\mathbb{k}} \operatorname{Spec}(A)$. *Wskazówka: poprzednie zadanie i Nakayama.*
2. Pokaż, że $\operatorname{Def}_{Z/Y}$ jest formalnie gładki. *Wskazówka: poprzednie zadanie.*
3. Załóżmy dodatkowo, że $\mathbb{k}$ jest algebraicznie domknięte i że Y jest gładki nad $\mathbb{k}$. Pokaż, że funktor Def_Z jest formalnie gładki.
Wskazówka: pokaż, że $\operatorname{Def}_{Z/Y}(A) \to \operatorname{Def}_Z(A)$ *jest surjekcją dla każdego A.*

Zadanie 6
Niech $\mathbb{k}$ będzie algebraicznie domknięte i niech C będzie krzywą rzutową nad $\mathbb{k}$. Pokaż, że

1. jeśli C jest gładka, to Def_C jest formalnie gładki. (funktor Def_C oznacza abstrakcyjne deformacje, patrz zadanie XI.4)
2. jeśli C ma afiniczne pokrycie otwarte U_i takie, że dla każdego i mamy $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ gdzie A_i jest zupełnym przecięciem w pewnej gładkiej $\mathbb{k}$-algebrze, to Def_C jest formalnie gładki.

Wskazówka: $H^2(C, F)$ *jest zerowy dla każdego snopa quasi-koherentnego, bo* $\dim(C) = 1$.