Teoria deformacji
XII seria zadań (na poniedziałek 18.05, wersja 1.01)

Zadanie 1
Snop lokalnie wolny E na schemacie X jest stałej rangi, jeśli istnieje d takie, że E ma rangę d w każdym punkcie X. Dla snopa lokalnie wolnego E stałej rangi definiujemy $\det(E) := \Lambda^{\operatorname{rk} E} E$. Pokaż, że

1. Jeśli E jest snopem zadanym przez kocykl $(\alpha_{ij}) \in H^0(U_{ij}, \mathrm{GL}_{\operatorname{rk} E}(\mathcal{O}_{U_{ij}}))$, gdzie $U_{ij} = U_i \cap U_j$ dla pewnego pokrycia trywializującego $\{U_i\}$, to snop $\det(E)$ jest zadany przez kocykl $\det(\alpha_{ij}) \in H^0(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\times})$.

2. Jeśli $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ jest krótkim ciągiem dokładnym snopów lokalnie wolnych stałej rangi, to $\det(E_2) \simeq \det(E_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \det(E_3)$.
Wskazówka: wypisz funkcje przejścia.

Zadanie 2 Podstawowe przykłady rozmaitości Fano
Niech $\Bbbk$ będzie algebraicznie domkniętym ciałem.

1. Pokaż, że $-K_{\mathbb{P}^n_{\Bbbk}} \simeq \mathcal{O}(n+1)$.
Wskazówka: ciąg Eulera.

2. Niech $H \subset_{cl} \mathbb{P}^n_{\Bbbk}$ będzie gładką hiperpowierzchnią zadaną formą F stopnia d. Pokaż, że $-K_H \simeq \mathcal{O}(n+1-d)$.
Wskazówka: ciąg kostyczny.

(Zatem $\mathbb{P}^n$ jest Fano oraz H jest Fano dla $d \leqslant n$, bo $\mathcal{O}_Y(m)$ jest szeroką wiązką dla $m \in \mathbb{Z}_+$ dla każdego Y)

Zadanie 3 Jedno z tych zadań z długą treścią i krótkim rozwiązaniem
Niech X, Y będą schematami nad ciałem $\Bbbk$, zaś $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ będą podschematami domkniętymi. Definiujemy podfunktor $\operatorname{Hom}(X, Y, X' \mapsto Y') \colon \mathrm{Sch}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ zadany przez

$$\operatorname{Hom}(X, Y, X' \mapsto Y')(T) = \left\{ \begin{tikzcd} X \times_{\Bbbk} T \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & Y \times_{\Bbbk} T \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & T & \end{tikzcd} \mid \exists_{\psi\colon X' \times_{\Bbbk} T \to Y' \times_{\Bbbk} T},\ \varphi|_{X' \times T} = \psi. \right\}$$

Pokaż, że $\operatorname{Hom}(X, Y, X' \mapsto Y')$ jest domkniętym podfunktorem $\operatorname{Hom}(X, Y)$.
Wskazówka: z definicji. Kluczowy techniczny lemat brzmi: jeśli $\varphi\colon F \to G$ jest morfizmem snopów lokalnie wolnych na schemacie T, to funktor $S \mapsto \{j\colon S \to T \mid j^*\varphi = 0\}$ jest reprezentowany przez schemat domknięty T, patrz wykład z 23.03.

Zadanie 4
Niech X będzie gładką rozmaitością nad ciałem algebraicznie domkniętym $\Bbbk$. Celem zadania jest obliczenie przestrzeni stycznej do Def_X. (definicja tego funktora: patrz XI.4). W tym zadaniu $\varepsilon^2 = 0$. Niech $\mathcal{U} = (U_i)$ będzie pokryciem afinicznym X.

1. Niech $\widetilde{X} \in \operatorname{Def}_X(\Bbbk[\varepsilon])$ i niech $\widetilde{U}_i$ oznacza schemat otwarty odpowiadający zbiorowi otwartemu $|U_i| \subset |\widetilde{X}| = |X|$. Pokaż, że $\widetilde{U}_i \simeq U_i \times \operatorname{Spec}(\Bbbk[\varepsilon])$ jako schematy nad $\operatorname{Spec}(\Bbbk[\varepsilon])$ są izomorficzne.

2. W sytuacji z poprzedniego podpunktu wybierz izomorfizmy $\widetilde{U}_i$ z $U_i \times \operatorname{Spec}(\Bbbk[\varepsilon])$ i pokaż, że indukują one kocykl $(a_{ij}) \in H^0(U_{ij}, T_X)$. Pokaż, że zmiana izomorfizmów zmienia ten kocykl o kobrzeg i wywnioskuj, że $\mathcal{X}$ indukuje dobrze określoną klasę $[a_{ij}] \in \check{H}^1(T_X)$.
Wskazówka: $\operatorname{Der}_{\Bbbk}(A, A)$ *jest w bijekcji ze zbiorem cięć włożenia* $\operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A[\varepsilon])$.

3. Pokaż, że każda klasa θ z $\check{H}^1(T_X)$ pochodzi od pewnego $\mathcal{X}$. Pokaż, że różne wybory kocyklu podnoszącego θ prowadzą do izomorficznych $\mathcal{X}$. Wywnioskuj, że $T\operatorname{Def}_X \simeq \check{H}^1(T_X)$.

Zadanie 5 Zadanie dodatkowe
Niech X będzie gładką rozmaitością (w szczególności X jest separowalna!) nad ciałem algebraicznie domkniętym $\Bbbk$. Pokaż, że Def_X ma teorię przeszkód z grupą przeszkód $\check{H}^2(T_X)$.
Uwaga: dopuszczam „częściowe" zgłoszenia tego zadania, z opisem, co udało się zrobić, a co nie.
Wskazówka: załóżmy, że chcemy sprawdzić, czy da się rozszerzyć deformację nad A do deformacji nad B, gdzie $B \twoheadrightarrow A$ małe rozszerzenie. Wybierzmy pokrycie afiniczne. Z zadania XI.4.1 wynika, że elementy pokrycia da się podnieść i że każde podniesienia są izomorficzne na przecięciach (przecięcia też są afiniczne!). Skonstruuj z tego Čechowski kocykl.