Teoria deformacji
XI seria zadań (na poniedziałek 11.05, wersja 1.12)

Zadanie 1
Niech S będzie pierścieniem wielomianów nad ciałem $\Bbbk$ i niech S/J będzie pierścieniem ilorazowym. Załóżmy, że $B \twoheadrightarrow A$ jest surjekcją $\Bbbk$-algebr, której jądro K spełnia $K^2 = 0$. Wreszcie, załóżmy, że mamy homomorfizm $\Bbbk$-algebr $f\colon S/J \to A$. Pokaż, że podnosi się on do homomorfizmu $\alpha\colon S \to B$ i że zbiór podniesień jest przestrzenią afiniczną nad przestrzenią wektorową $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(S, K)$.

Wskazówka: wykład 27.04 zrobił coś bardzo podobnego w smaku Artinowskim. Celem zadania jest sprawdzenie zrozumienia tego wykładu. Zauważ, że K jest A-modułem.

Zadanie 2 Infinitezymalna własność podnoszenia
W sytuacji z zadania 1., załóżmy, że $\Bbbk$ jest algebraicznie domknięte i że $X = \mathrm{Spec}(S/J)$ jest gładkim $\Bbbk$-schematem.

1. Pokaż, że odwzorowanie $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(S, K) \to \mathrm{Hom}_S(J/J^2, K)$, które obcina różniczkowanie d do J, jest surjekcją. *Wskazówka: zadanie X.4.*
2. Pokaż, że dla danego podniesienia α można tak dobrać element $d \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}(S, K)$, że $(\alpha - d)|_J = 0$. Wywnioskuj, że $\alpha - d$ opuszcza się do podniesienia f do homomorfizmu $S/J \to B$.
3. Niech $Y' \subset_{cl} Y$ będą dowolnymi schematami afinicznymi nad $\Bbbk$ takimi, że ideał $I_{Y' \subset Y}$ jest nilpotentny. Pokaż, że każdy morfizm $Y' \to X$ nad $\Bbbk$ podnosi się do morfizmu $Y \to X$ nad $\Bbbk$. Czy to podniesienie jest jedyne?

Własność z punktu 3. nazywamy *infinitezymalnym podnoszeniem. Jest ona istotnym uogólnieniem charakteryzacji regularności punktu, która pojawiła się na końcu wykładu 20 IV. Jest to także charakteryzacją: afiniczne schematy gładkie to dokładne te schematy skończonego typu, dla których zachodzi infinitezymalne podnoszenie.*

Zadanie 3 Infinitezymalne deformacje gładkich afinicznych są trywialne
Niech $\Bbbk$ będzie algebraicznie domknięte i niech X będzie gładkim afinicznym schematem nad $\Bbbk$. Niech A będzie lokalną Artinowską $\Bbbk$-algebrą z ciałem rezidualnym $\Bbbk$ i $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A)$ będzie płaskim afinicznym schematem nad $\Bbbk$ takim, że $\mathcal{X}|_{\mathrm{pt}}$ jest izomorficzny z X nad $\Bbbk$. Pokaż, że $\mathcal{X} \simeq X_A$.

Przykładowe kroki:

1. Skorzystaj z poprzedniego zadania i pokaż, że istnieje retrakcja $\pi\colon \mathcal{X} \to X$ dla domkniętego włożenia $X \hookrightarrow \mathcal{X}$. Wywnioskuj, że $\pi \times \varphi\colon \mathcal{X} \to X_A$ jest morfizmem płaskich schematów nad A takim, że $\pi|_{\mathrm{pt}}\colon \mathcal{X}|_{\mathrm{pt}} \to X$ jest izomorfizmem.
2. Pokaż ogólnie, że jeśli $\psi\colon Z_1 \to Z_2$ jest morfizmem płaskich afinicznych schematów nad $\mathrm{Spec}(A)$, przy czym $\psi|_{\mathrm{pt}}$ jest izomorfizmem, to ψ jest izomorfizmem.

Były pytania, więc przypominam: gładki schemat nad $\Bbbk$ jest z definicji skończonego typu nad $\Bbbk$. Ponadto $X_A := X \times_{\mathrm{Spec}(\Bbbk)} \mathrm{Spec}(A)$.

Zadanie 4
Zdefiniujmy naiwny funktor deformacji schematu X nad $\Bbbk$ jako $\mathrm{Def}_X\colon \mathrm{Art}_{\Bbbk} \to \mathrm{Set}$ zadany przez

$$\mathrm{Def}_X(A) = \left\{ \varphi\colon \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A) \;\middle|\; \varphi \text{ płaski, istnieje izomorfizm } \varphi|_{\mathrm{pt}} \simeq X \right\} /iso.$$

1. Niech $\Bbbk$ będzie algebraicznie domknięte. Pokaż, że jeśli X jest afiniczny i gładki, to $\mathrm{Def}_X(A) = \{*\}$ jest zbiorem jednopunktowym dla każdego A.
2. Niech $X = \Bbbk[x, y]/xy$. Rozważmy rodzinę
$$\mathcal{X} = \mathrm{Spec}\left(\frac{\Bbbk[x, y][t]}{xy - t}\right) \to \mathrm{Spec}(\Bbbk[t]).$$
i jej obcięcia $\mathcal{X}_n$ do $\mathrm{Spec}(\Bbbk[t]/t^n)$. Ustalmy dowolne $n \geqslant 2$. Pokaż, że $X \hookrightarrow \mathcal{X}_n$ nie jest retrakcją i wywnioskuj, że $\mathcal{X}_n$ nie jest izomorficzne z $X \times \mathrm{Spec}(\Bbbk[t]/t^n)$. Zatem Def_X nie jest w tym przypadku zbiorem jednopunktowym.

Nienaiwny funktor deformacji zawiera jako część danych ustalony izomorfizm $\varphi|_{\mathrm{pt}}$ z X. Nie zmienia to szczególnie rozumowania powyżej.

Zadanie 5 Zadanie dodatkowe, Afiniczność jest ważna w infinitezymalnym podnoszeniu
Mocno dodatkowe, bo wymaga wiedzy o krzywych eliptycznych. Niech $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Rozważmy rodzinę E kubik w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \mathrm{Spec}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2) = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]) \times_{\Bbbk} \mathrm{Spec}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ zadaną równaniem $y^2 z = x(x - z)(x - z(\lambda + \varepsilon))$. Oblicz, że j-niezmiennik rodziny E nie jest funkcją stałą i wywnioskuj, że nie jest ona izomorficzna nad $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ z rodziną trywialną. Wywnioskuj, że $\mathrm{Def}_{E|_{\mathrm{pt}}}$ nie jest zbiorem jednopunktowym.