Teoria deformacji
X seria zadań (na poniedziałek 4.05, wersja 1.11)

W tej serii w kilku miejscach kluczowy jest wniosek z twierdzenia Krulla o przecięciu: jeśli A jest noetherowskim pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $\mathfrak{m}$, to $\dim(A) \leqslant \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Ważne jest też samo twierdzenie, które mówi, że w sytuacji jak wyżej, jeśli $f_1, \ldots, f_k \in \mathfrak{m}$, to $\dim(A/(f_1, \ldots, f_k)) \geqslant \dim(A) - k$.

Zadanie 1
Niech $S = \Bbbk[[t_1, \ldots, t_d]]$ będzie pierścieniem szeregów formalnych i niech $\mathfrak{m} = (t_1, \ldots, t_d) \subset S$.

1. Oblicz wymiar pierścienia S. Możesz założyć, że S jest noetherowski (Atiyah-Macdonald rozdział 10). *Wskazówka: to pierścień lokalny, więc by oszacować wymiar z góry możesz użyć twierdzenia Krulla o ideale głównym (np. Eisenbud 10.2).*

2. Niech $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{m}$ będą elementami, którymi obrazy w $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ są liniowo niezależne. Pokaż, że $S/(f_1, \ldots, f_r)$ jest izomorficzny jako $\Bbbk$-algebra z $\Bbbk[[t_{r+1}, \ldots, t_d]]$.
Wskazówka: jak na wykładzie wywnioskuj, że jest on obrazem $\Bbbk[[t_{r+1}, \ldots, t_d]]$. Potem możesz argumentować, np. używając poprzedniego podpunktu by pokazać, że jądro jest trywialne.

3. Niech $\Bbbk[[u_1, \ldots, u_r]]$ będzie pierścieniem szeregów formalnych, niech $\mathfrak{n} = (u_1, \ldots, u_r)$.
Niech $\Bbbk[[t_1, \ldots, t_d]] \twoheadrightarrow \Bbbk[[u_1, \ldots, u_r]]$ będzie pewną ustaloną surjekcją $\Bbbk$-algebr. Pokaż, że jej jądro jest generowane przez dowolne $d - r$ elementów z jądra, których klasy tworzą bazę jądra surjekcji $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ jako przestrzeni liniowej nad $\Bbbk$. *Wskazówka: podziel przez te elementy i skorzystaj z poprzedniego podpunktu.*

Zadanie 2 PODSCHEMATY GŁADKIE GŁADKICH SĄ LOKALNIE ZUPEŁNYMI PRZECIĘCIAMI
Niech $Y = \operatorname{Spec}(A)$ będzie schematem afinicznym skończonego typu nad $\Bbbk$ i niech $X \subset Y$ będzie podschematem. Niech $d := \dim(Y)$, $r := \dim(X)$. Załóżmy, że $\Bbbk$-punkt x odpowiadający ideałowi $\mathfrak{m}_x \subset A$ jest regularnym punktem zarówno Y jak i X. Niech $I := I(X) \subset A$. Pokaż, że $IA_{\mathfrak{m}_x} \subset A_{\mathfrak{m}_x}$ jest generowany przez $d - r$ elementów, a nawet, że $IA_{\mathfrak{m}_x}$ jest generowany przez dowolne $d - r$ elementów które tworzą bazę jądra surjekcji $T_x^\vee Y \twoheadrightarrow T_x^\vee X$.
Wskazówka: z twierdzenia Krulla o przecięciu $\ker(A_\mathfrak{m} \to A_\mathfrak{m}/I_\mathfrak{m}) = \ker(A_\mathfrak{m} \to \widehat{A_\mathfrak{m}/I_\mathfrak{m}}) = \ker(\hat{A_\mathfrak{m}} \to \widehat{A_\mathfrak{m}/I_\mathfrak{m}}) \cap A_\mathfrak{m}$. *Skorzystaj z poprzedniego zadania i dobierz* $\dim_x(A) - \dim_x(A/I)$ *elementów z* $A_\mathfrak{m}$*, które generują* $\ker(\hat{A_\mathfrak{m}} \to \widehat{A_\mathfrak{m}/I_\mathfrak{m}})$.

Zadanie 3 DLA SK. PREZ. MODUŁÓW LOKALNA WOLNOŚĆ = PŁASKOŚĆ = PROJEKTYWNOŚĆ
Niech M będzie skończenie prezentowanym A-modułem. Uzasadnij, że M jest lokalny wolny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on projektywny. Przykładowe kroki:

1. Niech $S \subset A$ będzie będzie multiplikatywnie domknięty, a P będzie A-modułem skończenie prezentowanym. Pokaż, że dla każdego A-modułu N mamy
$$S^{-1} \operatorname{Hom}(P, N) \simeq \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}P, S^{-1}N).$$

2. Pokazaliśmy już (ćwiczenie V.1), że skończenie prezentowany płaski moduł jest lokalnie wolny.

3. Ustalmy ciąg $0 \to K \to F \to M \to 0$, gdzie F jest wolny, zaś M lokalnie wolny. Pokaż, że indukowane odwzorowanie $\operatorname{Hom}(M, F) \to \operatorname{Hom}(F, F)$ jest surjektywne. Wywnioskuj, że $F \to M$ ma cięcie, więc M jest projektywny. *Wskazówka: homomorfizm $M \to N$ jest surjektywny jeśli jest surjektywny po każdej lokalizacji w ideale maksymalnym.*

Zadanie 4 CHARAKTERYZACJA GŁADKOŚCI W TERMINACH CIĄGÓW KOSTYCZNYCH
Niech $\Bbbk$ będzie algebraicznie domkniętym ciałem. Niech Y będzie gładkim schematem nad $\Bbbk$ i niech $X \subset Y$ będzie podschematem. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

1. X jest gładki,

2. na pewnym afinicznym pokryciu $\{U_i\}_i$ schematu X obcięty ciąg kostyczny
$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2}\Big|_{U_i} \to \Omega_{Y/\Bbbk}|_{U_i} \to \Omega_{X/\Bbbk}|_{U_i} \to 0$$
jest również lewodokładny i rozszczepia się.

3. ciąg kostyczny jest lewodokładny i rozszczepia się na każdym afinicznym pokryciu $\{U_i\}$ schematu X.

Wskazówka: wszystko jest lokalne. Jeśli ciąg lokalnie rozszczepia się, to $\Omega_{X/\Bbbk}$ jest projektywny, a zatem lokalnie wolny, a jego ranga w każdym x wynosi $\geqslant \dim_x(X)$, lecz ranga $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ w x wynosi $\geqslant \dim_x(Y) - \dim_x(X)$ z twierdzenia Krulla. W drugą stronę: jeśli X jest gładki, to z zadania 2 i rozważań o rangach wynika, że ciąg jest dokładny po podzieleniu przez $\mathfrak{m}$. Skorzystaj np. z lokalnego kryterium płaskości by pokazać, że ciąg jest lewodokładny. Następnie użyj zadania 3 by pokazać, że się rozszczepia.