Teoria deformacji
I seria zadań (na poniedziałek 24.02.20)

Miło mi Państwa powitać na teorii deformacji. Otwierająca seria jest wciąż „w ciemno”, bo nie znam jeszcze poziomu, także proszę się nie niepokoić zbytnio, jeśli będzie za łatwa/za trudna. JJ

Trochę notacji, która jest zgodna ze standardową: symbol $\Bbbk$ oznacza ciało, niekoniecznie algebraicznie domknięte. W tej serii rozważamy kategorię *schematów afinicznych*. Obiekty tej kategorii oznaczamy przez $\operatorname{Spec}(A) = (A, |\operatorname{Spec}(A)|)$, gdzie A jest pierścieniem a $|\operatorname{Spec}(A)|$ jest przestrzenią topologiczną ideałów pierwszych w A, zaś morfizmy z $\varphi\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ to pary $\varphi^{\#}\colon A \to B$ oraz $|\varphi|\colon |\operatorname{Spec}(B)| \to |\operatorname{Spec}(A)|$, gdzie $\varphi^{\#}$ jest homomorfizmem pierścieni, a $|\varphi|$ indukowanym przez $\varphi^{\#}$ morfizmem na $|\operatorname{Spec}(-)|$. Otrzymaną kategorię oznaczamy Aff. Zatem $\mathrm{Aff} = \mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$, gdzie Ring to kategoria pierścieni. Punkt $\mathfrak{m} \in |\operatorname{Spec}(A)|$ jest *wymierny* jeśli złożenie $\Bbbk \to A \to A/\mathfrak{m}$ jest izomorfizmem. W tym przypadku ideał $\mathfrak{m}$ jest automatycznie maksymalny. Dla pierścienia A analogicznie definiujemy kategorię $\mathrm{Aff}_{\operatorname{Spec}(A)} = \mathrm{Aff}_A$ która jest odwrotna do kategorii A-algebr. Jeśli $X \to Y$ jest morfizmem w Aff_A, to mówimy też, że jest on *nad* A.

Zadanie 1
Niech A będzie $\Bbbk$-algebrą.

1. Pokaż, że istnieje naturalna bijekcja pomiędzy zbiorem punktów wymiernych $X = \operatorname{Spec}(A)$ a zbiorem morfizmów nad $\operatorname{Spec}(\Bbbk)$ ze $\operatorname{Spec}(\Bbbk)$ do X.
2. Niech $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$. Podaj bijekcję (a la Nullstellensatz) pomiędzy punktami wymiernymi $X = \operatorname{Spec}(A)$ a zbiorem $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Bbbk^n \mid \forall_{i=1,\ldots,m} f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\}$.

Zadanie 2 Przestrzeń styczna do schematu afinicznego
Niech A będzie $\Bbbk$-algebrą i $\mathfrak{m} \subset A$ będzie punktem wymiernym. Niech $X = \operatorname{Spec}(A)$. Przestrzeń $\Bbbk$-liniową $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ nazywamy *przestrzenią kostyczną* zaś przestrzeń $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \Bbbk)$ nazywamy *przestrzenią styczną* do X w punkcie $\mathfrak{m}$. Przestrzenie te oznaczamy przez $T^{\vee}_{\mathfrak{m}}X$, $T_{\mathfrak{m}}X$ odpowiednio.

1. Niech $A = \Bbbk[x, y]/(x^2 - y^3)$. Opisz punkty wymierne X oraz dla każdego z nich oblicz wymiar przestrzeni stycznej.
2. Pokaż, że istnieje naturalna bijekcja

$$T_{\mathfrak{m}}X \simeq \left\{ \begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(\Bbbk[\varepsilon]/\varepsilon^2) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec}(\Bbbk) & \end{tikzcd} \;\middle|\; \varphi(|\operatorname{Spec}(\Bbbk)|) = \{\mathfrak{m}\} \right\}.$$

3. Mając dane $\lambda_1, \lambda_2 \in \Bbbk$ oraz homomorfizmy $\varphi_i\colon \operatorname{Spec}(\Bbbk[\varepsilon_i]/\varepsilon_i^2) \to X$ dla $i = 1, 2$, odpowiadające wektorom $v_1, v_2 \in T_{\mathfrak{m}}X$, skonstruuj homomorfizm φ odpowiadający wektorowi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Funktor $F\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ jest *reprezentowalny* jeśli istnieje schemat afiniczny $X = \operatorname{Spec}(A)$ taki, że $F \simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{Aff}}(-, X)$.

Zadanie 3
Pokaż, że następujące funktory $F\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ są reprezentowalne:

1. $F(\operatorname{Spec}(A)) = A$,
2. $F(\operatorname{Spec}(A)) = \{a \in A \mid a \text{ odwracalny}\}$,
3. $F(\operatorname{Spec}(A)) = \{(a, b, c) \in A^3 \mid a^5 + b^5 = c^5\}$.
4. $F(\operatorname{Spec}(A)) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{Ab}}(V, A)$, gdzie V jest ustaloną wolną grupą abelową skończonej rangi.
   Postaraj się, by wynik nie zależał od ustalonego zbioru generatorów V.

Zadanie 4
Ciało $\Bbbk$ jest algebraicznie domknięte. Dany jest funktor $F\colon \mathrm{Aff}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ zadany na obiektach przez

$$F(\operatorname{Spec}(A)) = \{\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A) \mid B \text{ jest wolnym } A\text{-modułem rangi } 2\} / \simeq,$$

oraz na morfizmach $\operatorname{Spec}(C) \to \operatorname{Spec}(A)$ przez $\operatorname{Spec}(B) \mapsto \operatorname{Spec}(C \otimes_A B)$. (Oznaczenie „$/\simeq$” znaczy, że utożsamiamy izomorficzne A-algebry). Znajdź $F(\operatorname{Spec}(\Bbbk))$ i pokaż, że F nie jest reprezentowany.

Zadanie 5 Zadanie dodatkowe, sklejanie
Niech $F\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ będzie funktorem, zaś $X = \operatorname{Spec}(A)$ będzie pokryty przez $(U_i = \operatorname{Spec}(A_{f_i}))_i$. Załóżmy, że każdy $U_i \cap U_j$ jest pokryty przez $(U_{ijk} = \operatorname{Spec}(A_{f_i f_j g_k}))_k$. Pokaż, że istnieje ciąg odwzorowań zbiorów

$$\star \to F(X) \to \prod F(U_i) \rightrightarrows \prod F(U_{ijk})$$

gdzie dwie strzałki to obcięcia $F(U_i) \to F(U_{\bullet i \bullet})$ oraz $F(U_i) \to F(U_{i \bullet\bullet})$.

1. Uzasadnij, że jeśli F jest reprezentowalny, to powyższy ciąg jest dokładny. (zdefiniowanie, co tu znaczy dokładność, stanowi część zadania)
2. Podaj przykład niereprezentowalnego F dla którego ten ciąg jest dokładny (dla wszystkich X).