X sk. typu schemat nad ciałem $\Bbbk$, $\Bbbk$ alg. domknięte

[dla ekspertów: wystarczy $\Bbbk$ doskonałe: np. każde ciało w char 0 lub skończone]

Tw $x \in X(\Bbbk)$ NWSR:

① x jest punktem gładkim X.
② x jest punktem regularnym X.

Odnośniki: • Vakil ćw 12.2.I str. 339
(wybierz ulubiony) • Hartshorne I.5.1 str. 52
• stacks proj. Tag 038X

Dowód: Niech $d = \sup\{\dim Z \mid Z \subseteq X$ składowa nieprzywiedlna, $x \in Z\}$

① ⇒ ② Z zał. $(\Omega_{X/\Bbbk})_x$ jest wolny rangi d.

Zatem $\dim \Omega_{X/\Bbbk}/\mathfrak{m}_x\Omega_{X/\Bbbk} = d$. Ale $\Omega_{X/\Bbbk}/\mathfrak{m}_x\Omega_{X/\Bbbk} \simeq \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ jako przestrzenie wektorowe, więc $\dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = d = \dim \mathcal{O}_{X,x}$, stąd x regularny.

② ⇒ ① Z zał. i lematu z wykładu (20 kwietnia, pierwszy lemat z gładkości) wynika, że $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \Bbbk[[t_1 \dots t_d]]$, w szczególności jest to dziedzina.
Ale wiemy (zadanie IX.1), że wtedy $\mathcal{O}_{X,x}$ jest dziedziną.

Zatem istnieje otoczenie afiniczne $x \in U = \mathrm{Spec}(A) \underset{op}{\subseteq} X$ takie, że A jest sk. gen. dziedziną. Wtedy z def liczby „d" mamy $\dim A = d$.
W szczególności $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{max}(A)$ $\dim A_{\mathfrak{m}} = d$, co wynika np. z silnej wersji normalizacji Noether.

Z tw Krulla, dla każdego $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{max}(A)$ mamy

$$d = \dim A_{\mathfrak{m}} \leq \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \text{ranga}(\Omega_{X/\Bbbk}) \text{ w } \mathfrak{m} \qquad (*)$$

Z lematu o rozsmarowywaniu wynika, że $\exists\, x \in U' \underset{op}{\subseteq} U$ t.że $\Omega_{X/\Bbbk}|_{U'}$ jest generowany przez d elementów. afiniczny

Łącząc to z $(*)$ wnioskujemy, że w każdym domkniętym punkcie U' ranga $\Omega_{X/\Bbbk}|_{U'}$ jest równa d. Ale U' jest zredukowany, a nawet całkowity (bo U jest) oraz Noetherowski, a $\Omega_{X/\Bbbk}|_{U'}$ jest sk. generowana, zatem z zadania III.1 $\Omega_{X/\Bbbk}|_{U'}$ jest lokalnie wolna rangi d.
To kończy dowód. ☺