Teoria deformacji, termin II
Egzamin pisemny (23.09 8:00 – 24.09 21:00), wersja 1.00

Pytania można zadawać do godziny 12:00 dnia 23.09. Rozwiązania liczy się za wysłane dopiero po otrzymaniu ode mnie potwierdzenia przyjęcia. Próg na ocenę 5. to 6/7 zadań całkowicie zrobionych, na ocenę 4.5 próg to 5.5/7 zadań. W razie gorszego wyniku nie wstawię oceny z II terminu. Za częściowo zrobione zadanie przyznaję punkty częściowe, nie ma punktów ujemnych.

Wykład

Ogólna wskazówka: Do poniższych trzech zadań najlepiej podchodzić tak, jakby były pytaniami zadanymi na ustnym i spisać to, co powiedzielibyście przy tablicy. Proszę zarówno o ogólny obraz jak i **trochę szczegółów**.

Zadanie 1
Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{k}$. Zdefiniuj funktor Grassmannianu $\mathrm{Gr}(r, V)$. Pokaż, że jest on reprezentowany przez schemat, który ma otwarte pokrycie przestrzeniami afinicznymi nad $\mathbb{k}$. Podaj opis wiązki stycznej do Grassmannianu w postaci snopa Hom i dowiedź go.

Zadanie 2
Niech X i Y będą schematami rzutowymi nad $\mathbb{C}$. Naszkicuj konstrukcję schematu $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Rozstrzygnij i uzasadnij, czy składowe spójne tego schematu są rzutowe dla każdych X i Y?
Uwaga: możesz przyjąć za daną konstrukcję schematu Hilberta. Każdy pominięty fragment konstrukcji sformułuj wyraźnie w postaci lematu, którego nie dowodzisz.

Zadanie 3
Niech ciało $\mathbb{k}$ będzie algebraicznie domknięte. Podaj główne kroki dowodu, że schemat Hilberta punktów na $\mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$ jest gładki nad $\mathbb{k}$ i oblicz jego wymiar.
Uwaga: możesz pominąć obliczenia związane z dualnością Serre'a, ale każdy pominięty fragment sformułuj wyraźnie w postaci lematu, którego nie dowodzisz.

Ćwiczenia

Ogólna wskazówka: w tej części proszę o dość pełne rozwiązania, takie, jakbyście prezentowali na ćwiczeniach. Zabronione jest powoływanie się w rozwiązaniach na następujące zadania z ćwiczeń: III.1, V.1, VIII.1, X.4, XV.1. Można się powoływać na pozostałe, należy jednak podać odnośnik i dokładnie sformułować, na co się powołujecie.

Zadanie 4
Niech A będzie pierścieniem, zaś M będzie skończenie prezentowanym płaskim A-modułem. Pokaż, że M jest lokalnie wolny.

Zadanie 5
Niech $\mathbb{k}$ będzie ciałem. Ustalmy $S = \mathbb{k}[x_0, \ldots, x_n]$, gdzie $n \geqslant 1$. Weźmy $d \geqslant 1$ i niech $0 \neq F \in S_d$, zaś

$$Z = (F = 0) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{k}} := \operatorname{Proj} S.$$

Oblicz wymiar przestrzeni stycznej do schematu Hilberta w $\mathbb{k}$-punkcie odpowiadającym Z.

Zadanie 6 Charakteryzacja gładkości w terminach ciągów kostycznych
Niech $\mathbb{k}$ będzie algebraicznie domkniętym ciałem. Niech Y będzie gładkim schematem nad $\mathbb{k}$ i niech $X \subset Y$ będzie podschematem. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

1. X jest gładki,
2. na pewnym afinicznym pokryciu $\{U_i\}_i$ schematu X obcięty ciąg kostyczny
$$\left.\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}^2}\right|_{U_i} \to \Omega_{Y/\mathbb{k}}|_{U_i} \to \Omega_{X/\mathbb{k}}|_{U_i} \to 0$$
jest również lewodokładny i rozszczepia się.
3. ciąg kostyczny jest lewodokładny i rozszczepia się na każdym afinicznym pokryciu $\{U_i\}$ schematu X.

Zadanie 7
Niech $\mathbb{k}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Skonstruuj wiązkę $\mathcal{E}$ na $\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}$ taką, że $\mathcal{E}|_{p^{-1}(\lambda)} \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-(n-1))$ dla $\lambda \neq 0$ oraz $\mathcal{E}|_{p^{-1}(0)} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n)$ gdzie $p \colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{k}}$ jest rzutowaniem.
2. Używając elementu $\mathcal{E} \in \mathrm{Pic}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}}}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{k}})$ pokaż, że naiwny funktor Pic nie jest reprezentowalny.