** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadanka.tex % Created: Fri Oct 11 12:00 AM 2013 C % Last Change: Fri Oct 11 12:00 AM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\

date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{6cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{11 października 2013} begin{document} section{Sieknijmy!} noindentbegin{minipage}{10.5cm} begin{problem}[Twierdzenie o~siecznych] Dany jest okrąg o o~środku O i~promieniu R oraz~punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i~przecina okrąg o w~(niekoniecznie różnych) punktach A i~B, to iloczyn $|PA| cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a~dokładniej [|PA| cdot |PB| = abs{|PO|^{2} - R^2}.] end{problem} end{minipage}begin{minipage}{5cm} includegraphics[origin=c]{pow_in} end{minipage} begin{problem} Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest rzutem A na BC, zaś punkt E jest rzutem B na AC. Uzasadnij, że $CEcdot CA = CDcdot CB$. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości $ triangle ABC$. Które z~liczb [DHcdot HA,quad AHcdot AD,quad AEcdot CA,quad EH cdot BH,] są równe? end{problem} begin{problem} Punkt P leży na przecięciu stycznych wypuszczonych z~punktów A i~B leżących na okręgu o~środku w~O. Punkt K jest środkiem odcinka AB. Uzasadnij, że zachodzi $PA^2 = PKcdot PO$. end{problem} begin{problem} Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A,B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $angle PXY = angle PYX$. end{problem} begin{problem}[Kryterium współokręgowości] Jeżeli punkty S,A,B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o~początku w~S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i~tylko wtedy, gdy $SAcdot SB = SC cdot SD$. end{problem} begin{problem} Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MBcdot ME=MCcdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AEcdot AC=AFcdot AB$. end{problem} begin{problem}[$star$] Dane są okręgi o_1, o_2 przecinające się w~dwóch punktach leżących na prostej m oraz punkt P. Półproste k i~l mają początek w~P i przecinają: k okrąg o_1 w~A, B, zaś l okrąg o_2 w~C, D (punkty A, B, C, D są parami różne). Udowodnić, że na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg wtedy i~tylko wtedy, gdy P leży na prostej m. end{problem} begin{problem} Punkt P leży wewnątrz nierównoramiennego trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany w~punktach D, E, F (przy czym $Dneq A, Eneq B,Fneq C$). Styczna do okręgu opisanego w~punkcie C przecina AB w~punkcie S takim, że $CS = SP$. Uzasadnij, że SP jest styczną do okręgu opisanego na $ triangle ABP$ oraz że $FD = FE$. end{problem} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: zadanka.tex % Created: Fri Oct 11 12:00 AM 2013 C % Last Change: Fri Oct 11 12:00 AM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=26cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} %usepackage{multline} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{6cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{11 października 2013} begin{document} section{Sieknijmy!\large rozwiązania} noindentbegin{minipage}{10.5cm} begin{problem}[Twierdzenie o~siecznych] Dany jest okrąg o o~środku O i~promieniu R oraz~punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i~przecina okrąg o w~(niekoniecznie różnych) punktach A i~B, to iloczyn $|PA| cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a~dokładniej [|PA| cdot |PB| = abs{|PO|^{2} - R^2}.] end{problem} end{minipage}begin{minipage}{5cm} includegraphics[origin=c]{pow_in} end{minipage} begin{problem} Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest rzutem A na BC, zaś punkt E jest rzutem B na AC. Uzasadnij, że $CEcdot CA = CDcdot CB$. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości $ triangle ABC$. Które z~liczb [DHcdot HA,quad AHcdot AD,quad AEcdot CA,quad EH cdot BH,] są równe? end{problem} begin{sol} Skoro $ triangle ABC$ jest ostrokątny, to $DH < AD$, stąd $DHcdot HA < AHcdot AD$. Pokażemy, że $DHcdot HA = EHcdot HB$ oraz $AHcdot AD = AEcdot CA$, będą to więc jedyne równości. Skoro $ angle ADB = angle BEA = 90^circ$, to na czworokącie $ABDE$ da się opisać okrąg. Przekątne AD i~BE przecinają się w~H, więc $AHcdot HD = HEcdot HB$ z~twierdzenia o~siecznych. Podobnie, $ angle HDC = angle HEC = 90^circ$, więc punkty H, D, C, E leżą na jednym okręgu. Z~twierdzenia o~siecznych mamy $AEcdot AC = AH cdot AD$. end{sol} begin{problem} Punkt P leży na przecięciu stycznych wypuszczonych z~punktów A i~B leżących na okręgu o~środku w~O. Punkt K jest środkiem odcinka AB. Uzasadnij, że zachodzi $PA^2 = PKcdot PO$. end{problem} begin{sol} Skoro K jest środkiem cięciwy AB, to $OKperp AB$, czyli $ angle AKO =

90^circ$ i~środek okręgu opisanego na $ triangle AKO$ leży na AO. Wobec tego PA jest styczną do tego okręgu i~z~twierdzenia o~siecznych (a~konkretniej o~siecznej i~stycznej) mamy $PA^2 = PKcdot PO$. end{sol} begin{problem} Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A,B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $angle PXY = angle PYX$. end{problem} begin{sol} Skoro punkt P leży na AB to [PX^2 = PAcdot PB = PY^2,] stąd $|PX|^2 = |PY|^2$, $|PX| = |PY|$, więc trójkąt PXY jest równoramienny, co kończy dowód. end{sol} begin{problem}[Kryterium współokręgowości] Jeżeli punkty S,A,B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o~początku w~S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i~tylko wtedy, gdy $SAcdot SB = SC cdot SD$. end{problem} begin{sol} ``wtedy''. Jeżeli $A, B, C, D$ leżą na jednym okręgu, to $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. ``tylko wtedy''. Załóżmy zatem, że $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. Okrąg opisany na A, B, C przecina półprostą SC w~punkcie D' (gdy jest on styczny przyjmujemy $D' = C$). Korzystając z~implikacji ``wtedy'' obliczamy $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. Łącznie $|SC|cdot |SD| = |SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD'|$, czyli $|SD| = |SD'|$, $D = D'$. end{sol} begin{problem} Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MBcdot ME=MCcdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AEcdot AC=AFcdot AB$. end{problem} begin{sol} Skoro $MBcdot ME=MCcdot MF$ to (z~powyższego kryterium) B, E, C, F leżą na jednym okręgu o, a~skoro tak to $AEcdot AC = AFcdot AB$. end{sol} begin{problem}[$star$] Dane są okręgi o_1, o_2 przecinające się w~dwóch punktach leżących na prostej m oraz punkt P. Półproste k i~l mają początek w~P i przecinają: k okrąg o_1 w~A, B, zaś l okrąg o_2 w~C, D (punkty A, B, C, D są parami różne). Udowodnić, że na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg wtedy i~tylko wtedy, gdy P leży na prostej m. end{problem} begin{sol} Oznaczmy punkty przecięcia przez X, Y. Jeżeli P leży na XY, to $PAcdot PB = PXcdot PY = PCcdot PD$ z~twierdzenia o~siecznych dla o_1, o_2. Jeżeli zaś $PAcdot PB = PCcdot PD$, to oznaczamy przez Y' drugi punkt przecięcia prostej PX z~o_1. Wtedy $PXcdot PY' = PA cdot PB = PCcdot PD$, więc C, D, X, Y' leżą na jednym okręgu~--- o_2. Skoro tak, to Y' leży na o_1 i~o_2, więc $Y' = Y$. emph{Uwaga: jest tutaj nieco niewyjaśnionych delikatności, np. dlaczego $Y' neq X$?} end{sol} begin{problem} Punkt P leży wewnątrz nierównoramiennego trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany w~punktach D, E, F (przy czym $Dneq A, Eneq B,Fneq C$). Styczna do okręgu opisanego w~punkcie C przecina AB w~punkcie S takim, że $CS = SP$. Uzasadnij, że SP jest styczną do okręgu opisanego na $ triangle ABP$ oraz że $FD = FE$. end{problem} begin{sol} begin{minipage}{8cm} Skoro SC jest styczną to $SC^2 = SAcdot SB$. Wobec tego również $SP^2 = SAcdot SB$. Oznaczmy drugi punkt przecięcia prostej SP z~okręgiem opisanym na $ triangle ABP$ jako P'. Wtedy $SPcdot SP' = SAcdot SB = SP^2$, czyli $P' = P$ i~jest SP jest styczną. Aby udowodnić, że $FD = FE$ wystarczy (i~potrzeba) wykazać, że styczna do okręgu opisanego na $ triangle ABC$ w~punkcie F jest równoległa do ED. Udowodnimy, że obydwie te proste są równoległe do PS. Dla uproszczenia zapisu niech S' leży na PS po innej stronie P niż S. Mamy, używając twierdzenia o~kącie wpisanym i~dopisanym $ angle BED = angle BAD = angle BPS'$, stąd $PS' parallel DE$.

Oznaczmy przez F' punkt na stycznej do F leżący ,,po przeciwnej stronie niż B''. Obliczamy begin{multline*}angle F'FC = angle F'FA + angle AFC = \ angle FCA + angle ACS = angle SCP = angle SPC,end{multline*} end{minipage}begin{minipage}{8cm} includegraphics{zad8} end{minipage} gdzie stosujemy twierdzenie o~kącie wpisanym i~dopisanym oraz, w~ostatnim przejściu, założenie $SC = SP$. Wobec powyższej równości mamy $PS parallel FF'$, co kończy dowód. emph{Wszystkie powyższe triki ze styczną da się przepisać na kąty. Ale po namyśle uważam, że nie ma najmniejszych szans zobaczyć tych kątów bez dobrego rysunku :) I~to dlatego zadanie było trudnedots} end{sol} end{document}