Do wszystkich zadań są wskazówki. W razie, gdyby ktoś zobaczył błąd -- piszcie!

Niech przestrzeń będzie z Wami! J.

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadania.tex % Created: Thu Jan 30 08:00 AM 2014 C % Last Change: Thu Jan 30 08:00 AM 2014 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=25.5cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } newcounter{wskaz} newenvironment{wskazowka}[1][]{ stepcounter{wskaz} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Wskazówka thewskaz{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{6cm} defheadpicture{micek-2cm.jpg} defauthor{(a~miejscami nawet surround)} defdate{30 stycznia 2014} begin{document} section{Stereo} emph{To kółko wiele zawdzięcza niezrównanym artykułom Michała Kiezy z~,,Kącika Przestrzennego'' Delty. Oprócz tego zadania pochodzą z~OMów oraz prezentacji Adama Osękowskiego. Prawdopodobnie są w~nich literówki (albo i~gorzej). Gdyby ktoś coś zobaczył, proszę o~informację na maila; poprawię.} vspace{1em} Ogólne fakty: w~czworościanie istnieje środek ciężkości (leżący na przecięciu czterech odcinków łączących wierzchołki ze środkami ciężkości ścian), na czworościanie można opisać sferę i~można weń wpisać sferę. subsection*{Punkty wyróżnione $star$} W~tym akapicie dany jest czworościan $ABCD$. Skonstruujemy trzy (nie cztery) punkty wyróżnione tego czworościanu. Niekoniecznie trzeba umieć uzasadnić konstrukcje, ale czasami warto je znać. emph{Wskazówka do wszystkich dowodów: jak się dowodzi istnienia na płaszczyźnie?} begin{problem} Uzasadnij, że czterech odcinków łączących wierzchołki ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w~jednym punkcie M. Nazywamy go emph{środkiem ciężkości} czworościanu. end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że sześć płaszczyzn symetralnych do krawędzi czworościanu przecina się w~jednym punkcie O. Nazywamy go emph{środkiem sfery opisanej} na czworościanie. Uzasadnij, że zaiste istnieje (jedyna) sfera przechodząca przez punkty $ABCD$ o~środku w~O. end{problem} begin{problem} emph{Płaszczyzna dwusieczna} kąta pomiędzy dwoma płaszczyznami to zbiór punktów równoodległych od tych płaszczyzn. Uzasadnij, że cztery płaszczyzny dwusieczne kątów pomiędzy ścianami czworościanu przecinają się w~jednym punkcie I. Nazywamy go emph{środkiem sfery wpisanej} w~czworościan. Uzasadnij, że zaprawdę istnieje (jedyna) sfera styczna do ścian czworościanu $ABCD$ o~środku w~I. end{problem} subsection*{Proste prostopadłe} Kluczowe są następujące dwie uwagi begin{enumerate} item jeżeli dwie nierównoległe proste m_1, m_2 leżące w~danej płaszczyźnie są prostopadłe do prostej ell, to cała płaszczyzna zawierająca m_1 i~m_2 jest prostopadła do ell. item jeżeli prosta ell jest prostopadła do płaszczyzny pi, to jest prostopadła do dowolnej prostej z~tej płaszczyzny. end{enumerate} begin{problem}[Twierdzenie o~trzech prostopadłych, ważne!] Dany jest punkt A i~prosta ell leżąca na płaszczyźnie pi. Niech H oznacza rzut A na pi. Udowodnij, że rzuty punktów A i~H na prostą ell pokrywają się. end{problem} begin{problem} Dane są odcinki CD i~AB. Uzasadnij, że $CDperp AB$ wtedy i~tylko wtedy, gdy rzuty C i~D na AB pokrywają się. end{problem} begin{problem} Wszystkie kąty przy wierzchołku A czworościanu $ABCD$ są proste. Wykaż, że rzut H punktu A na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD. end{problem} begin{problem}[ważne!] Uzasadnij, że proste l i~m leżą w~jednej płaszczyźnie wtedy i~tylko wtedy, gdy są równoległe lub przecinają się.

end{problem}   begin{problem}   Dany jest czworościan $ABCD$.   Wykaż, że jeżeli wysokości poprowadzone z~punktów A i~B tego   czworościanu przecinają się, to proste AB i~CD są prostopadłe.   emph{Zatem ogólnie w~czworościanie wysokości nie przecinają się   w~jednym punkcie~--- niekoniecznie istnieje ortocentrum.}   end{problem}   begin{problem}   Krawędź AD czworościanu $ABCD$ jest prostopadła do płaszczyzny ABC. Uzasadnij, że rzut ortocentrum trójkąta ABC na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD.   end{problem}   subsection*{Równość stycznych i~ulubiony lemat MK}   Poniższe twierdzenie jest kluczowe w~stereometrii. Warto przeanalizować   wszystkie dowody, by przy okazji nauczyć się pożytecznych rzeczy.   begin{thm}[Najmocniejsze twierdzenie stereometrii, ważne!]   Niech o będzie sferą, a~P dowolnym punktem poza kulą, której brzegiem   jest o. Wtedy wszystkie styczne z~P do o mają równe długości.   end{thm}   begin{proof}[I~dowód]   Niech O oznacza środek sfery, r jej promień, zaś X będzie dowolnym punktem   styczności. Wtedy trójkąt PXO jest prostokątny i~z~twierdzenia   Pitagorasa $PX = sqrt{PO^2 - XO^2} = sqrt{PO^2 - r^2}$. To nie   zależy od punktu X.   end{proof}   begin{proof}[II dowód]   Niech O będzie środkiem sfery o.   Rozważmy dowolne dwa punkty styczności X i~Y oraz płaszczyznę pi zawierającą P, X i~Y. Niech $u = ocap pi$ będzie   okręgiem wycinanym przez pi, zaś U jego środkiem.   Punkt O jest równoodległy od punktów u, więc jego rzut również,   zatem U jest rzutem O na pi. Skoro $XOperp PX$ i~$OUperp pi supseteq PX$, to $UXperp PX$. Podobnie $UYperp PY$.   Skoro tak, to PX i~PY są styczne do okręgu o, więc $PX = PY$.   end{proof}   begin{proof}[Szkic III dowodu]   Niech O oznacza środek sfery o i~niech o_2 będzie sferą o~środku   w~środku odcinka OP i~promieniu takim, że $Oin o_2$. Niech X będzie dowolnym punktem styczności, wtedy $ angle PXO = 90^circ$,   więc $Xin o_2$.   Skoro tak, to zbiór punktów styczności jest okręgiem, który jest   przecięciem sfer o i~o_2 (emph{pomyśl o~tym okręgu dostatecznie długo, by wydało się to   oczywiste, przynajmniej ,,na rysunku''}!).   Niech $u = o cap o_2$ oznacza ten okrąg.   Sfery o i~o_2 nie zmieniają się przy   obrocie wokół OP, więc również u nie zmienia się przy tym   obrocie. A~to znaczy, że środek u leży na OP i~u leży   w~płaszczyźnie prostopadłej do OP.   Styczne z~punktu P do o to odcinki łączące P z~punktami u,   czyli tworzące pewnego stożka, które mają równe długości   (emph{to prosty wniosek z~Pitagorasa}).   end{proof}   Prawdziwa siła tego twierdzenia wynika z~faktu, że, w~przeciwieństwie do   płaszczyzny, stycznych jest nieskończenie wiele.   begin{problem}   Sfera wpisana w~czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w~P zaś do ściany ABD w~Q. Uzasadnij, że $ angle APB = angle AQB$.   Dowiedź także, że $ angle APC = angle BQD$.   emph{Narysuj wszystkie punkty styczności sfery i~sprawdź, które kąty   przy tych punktach są równe!}   end{problem}   begin{problem}[$starstar$]   Zdefiniuj sferę dopisaną do ściany ABC czworościanu $ABCD$ i~dowiedź, że sfera ta istnieje.   end{problem}   begin{problem}   Niech s będzie sferą wpisaną w~czworościan $ABCD$, zaś s' będzie   sferą dopisaną do ściany ABC tego czworościanu.   Niech P, Q będą punktami styczności sfer s, s' do płaszczyzny ABD. Uzasadnij, że punkty P, Q, D są współliniowe.   end{problem}   begin{problem}   Czy rzut środka sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ na   ścianę ABC jest środkiem okręgu opisanego na ABC? Czy rzut środka   sfery wpisanej w~$ABCD$ jest środkiem okręgu wpisanego?   end{problem}   subsection*{Miscellanea i~zadania z~OMów}   begin{problem}

Okręgi wpisane w~ściany ABC i~ABD czworościanu $ABCD$ są styczne do krawędzi AB w~tym samym punkcie. Wykaż, że punkty styczności tych okręgów z~krawędziami AC, BC oraz AD, BD leżą na jednej sferze. end{problem} begin{problem}[$star$] W~czworościanie $ABCD$ krawędź AB jest prostopadła do kra-wędzi CD i~$angle ACB=angle ADB$. Udowodnij, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź AB i~środek krawędzi CD jest prostopadła do krawędzi CD. end{problem} begin{problem}[59 OM] Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o~podstawie $ABCD$, będącej czworokątem wypukłym. Sfera wpisana w~ten ostrosłup jest styczna do $ABCD$ w~P. Uzasadnij, że $ angle APB + angle CPD = 180^circ$. end{problem} begin{problem}[61 OM] Punkty A', B', C' są odpowiednio rzutami prostokątnymi wierzchołków A, B, C czworościanu $ABCD$ na przeciwległe ściany. Dowieść, że jeżeli punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD, punkt B' jest środkiem okręgu wpisanego w~trójkąt ACD, zaś punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny. end{problem} begin{problem}[61 OM] Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej ell leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na tym czworościanie. Udowodnij, że jeśli prosta ell przecina odcinek AB, to $ angle ACB = angle ADB$. end{problem} begin{problem} Niech M będzie środkiem ciężkości ściany ABC czworościanu $ABCD$. Uzasadnij, że objętości czworościanów $ABMD$, $BCMD$ i~$CAMD$ są równe. end{problem} begin{problem} Niech I będzie środkiem sfery wpisanej w~czworościan $ABCD$, zaś I' będzie leżał na odcinku DI. Uzasadnij, że odległości I' od ścian ABD, BCD, CAD są równe. end{problem} begin{problem}[63 OM] Udowodnij, że w~czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i~tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, BCD i~CAD są równe. end{problem} begin{problem}[62 OM] W~czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykaż, że jeśli dwie z~tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe. end{problem} subsection*{Wskazówki do zadań} begin{wskazowka} Jeżeli wierzchołki mają współrzędne (w~jakimkolwiek układzie) (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C), (x_D, y_D, z_D), to środek ciężkości ma współrzędne [left(frac{sum x_i}{4}, frac{sum y_i}{4}, frac{sum z_i}{4} right).] end{wskazowka} begin{wskazowka} emph{Płaszczyzna symetralna} odcinka AB to płaszczyzna przechodząca przez środek AB i~prostopadła do AB. Z~drugiej strony płaszczyzna ta to emph{zbiór punktów równoodległych od A i~B}. Tę ważną własność warto sprawdzić lub choć zapamiętać. Mając ją, przecinamy trzy symetralne i~uzasadniamy, że pozostałe trzy przechodzą przez punkt przecięcia. Dlaczego trzy symetralne mają punkt przecięcia (nie ma problemów z~równoległością)? Gdyby nie, to czworościan złożyłby się do płaskiego. end{wskazowka} begin{wskazowka} Na początek trzeba skonstruować dwusieczną. Łatwiej to zrobić niż zapisać ldots Niech pi i~pi' będą dwoma półpłaszczyznami przecinającymi się na prostej m. Niech $sigma$ będzie płaszczyzną prostopadłą, załóżmy, że przecina ona pi w~półprostej l i~pi' w~półprostej l'. emph{Płaszczyzna dwusieczna} kąta dwuściennego pomiędzy pi i~pi' to płaszczyzna przechodząca przez m i~dwusieczną kąta pomiędzy półprostymi l i~l'. Konstrukcja nie zależy od wyboru $sigma$. Teraz, podobnie jak w~poprzednim zadaniu, trzeba sprawdzić, że płaszczyzna dwusieczna kąta to zbiór tych punktów wewnątrz kąta, które są równoodległe od obu ścian kąta. end{wskazowka} begin{wskazowka} emph{To ważne zadanie dobrze pokazuje metodę manipulacji prostopadłością. Jak zwykle warto wyobrazić sobie rysunek.} Niech H' oznacza rzut A na ell. Wtedy $AH'perp ell$ z~definicji. Z~drugiej strony $AHperp ell$, gdyż $AHperp pi$ a~ell leży w~pi. Wobec tego proste AH' i~AH w~płaszczyźnie AHH' są prostopadłe do ell, więc cała AHH' jest prostopadła, a~stąd $HH'perp ell$. To dowodzi, że H' jest rzutem H na ell. end{wskazowka} begin{wskazowka} Jeżeli rzuty C i~D pokrywają się, to, oznaczając rzut przez K, mamy $CKperp AB$ i~$DKperp AB$, więc cała płaszczyzna CDK jest prostopadła do AB, stąd $CDperp AB$. Z~drugiej strony załóżmy, że $CDperp AB$ i~niech K będzie rzutem C na AB. Wtedy również CDK jest prostopadła do AB, więc DK jest rzutem D na AB. end{wskazowka} begin{wskazowka} Wystarczy pokazać, że BH jest prostopadłe do CD (i~analogicznie dla CH i~DH). Ale $AHperp BCD$, więc $AHperp CD$ oraz $AB perp ACD$, więc $ABperp CD$. Stąd też $ABHperp CD$, więc $BHperp CD$. end{wskazowka} begin{wskazowka} Jeżeli l i~m leżą w~jednej płaszczyźnie, to jest to oczywiste. Jeżeli l i~m przecinają się, to leżą w~płaszczyźnie zawierającej l i~dowolny punkt z~m inny niż punkt przecięcia. Jeżeli l i~m są prostopadłe, to leżą w~płaszczyźnie zawierającej l i~dowolny punkt m. end{wskazowka} begin{wskazowka} Na mocy poprzedniego zadania wysokości AH_1 i~BH_2 leżą w~pewnej płaszczyźnie pi. Mamy $AH_1perp BCD$ oraz $BH_2perp ACD$, więc $pi perp CD$. Ale $AB subseteq pi$, więc $AB perp CD$. end{wskazowka} begin{wskazowka} Niech J oznacza ortocentrum ABC, zaś H oznacza jego rzut na BCD. Wystarczy pokazać, że $BH perp CD$, wtedy analogicznie $CH perp BD$ i~mamy tezę. Mamy $BHperp AC$ i~$BH subseteq ABCperp AD$, więc $BHperp CD$. end{wskazowka} begin{wskazowka} Z~równości stycznych $AP = AQ$ i~$BP = BQ$, więc $ triangle ABP equiv triangle ABQ$, w~szczególności $ angle APB = angle AQB$. Druga równość wynika z~pierwszej: najlepiej narysować siatkę czworościanu, zaznaczyć wszystkie 12 kątów (6 par kątów równych) przy 4 punktach styczności sfery wpisanej i~sprawdzić, że $ angle APC = angle BQD$ bezpośrednimi obliczeniami. end{wskazowka} begin{wskazowka} emph{Sfera dopisana} to sfera styczna do trójkąta ABC i~płaszczyzn zawierających pozostałe ściany czworościanu $ABCD$ taka, że jej środek leży poza $ABCD$. By ją skonstruować, trzeba przypomnieć, jak był konstruowany okrąg dopisany: jako przecięcie dwusiecznej kąta i~dwusiecznej kąta zewnętrznego. Środek sfery dopisanej leży na przecięciu dwóch dwusiecznych kątów dwuściennych i~jednego dwusiecznej kąta zewnętrznego dwuściennego (co to jest?). end{wskazowka} begin{wskazowka} Punkty styczności to rzuty środków odpowiednich sfer. Środki te oraz punkt D leżą na pewnej prostej ell. Prosta ell jest przecięciem dwusiecznych trzech kątów dwuściennych: pomiędzy ABD i~BCD, pomiędzy BCD i~CAD oraz pomiędzy CAD i~ABD. end{wskazowka} begin{wskazowka} Rzut środka sfery opisanej jest środkiem okręgu opisanego na mocy twierdzenia Pitagorasa. Dla sfery wpisanej nie jest to prawdą: nieformalnym przykładem jest np.~czworościan o~pięciu krawędziach równej długości a, zaś~piątej krawędzi b. krótkiej w~porównaniu z~a. end{wskazowka} begin{wskazowka} Niech pi oznacza prostopadłą do AB w~punkcie styczności okręgów. Niech proste l_1 i~l_2 oznaczają prostopadłe ABC i~ABD przechodzące przez środki okręgów wpisanych. Wtedy l_1 i~l_2 leżą w~pi, więc przecinają się (dlaczego nie są równoległe?), punkt przecięcia jest środkiem sfery. end{wskazowka} begin{wskazowka} Z~równości kątów wynika, na mocy twierdzenia sinusów, że promienie okręgów opisanych na ABC i~ABD są równe.

Niech O będzie środkiem sfery opisanej na $ABCD$. Z~równości promieni i~twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że O jest równoodległy od płaszczyzn ABC i~ABD. Wobec tego ABO jest dwusieczną kąta dwuściennego pomiędzy ABC i~ABD. Niech K oznacza rzut C na AB; skoro $CDperp AB$ to K jest także rzutem D na AB. Wystarczy wykazać, że $KMperp CD$. Niech pi będzie płaszczyzną CDK. Niech $ell = ABOcap pi$, wtedy ell jest dwusieczną CKD oraz ell zawiera środek okręgu opisanego na CKD. Wobec tego CKD jest równoramienny i~$KMperp CD$. end{wskazowka} begin{wskazowka} Narysuj siatkę, zaznacz wszystkie punkty styczności i~wszystkie kąty równe przy nich i~przelicz. end{wskazowka} end{document}