Nierówności: Bezout i średnie

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
sobota, 30 listopada 2013 20:31 -

Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadania.tex % Created: Fri Nov 29 08:00 AM 2013 C % Last Change: Fri Nov 29 08:00 AM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=17cm, textheight=27cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{mathtools} %DeclarePairedDelimiter{floor}{lfloor}{rfloor} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{7cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{29 listopada

2013} begin{document} section{Nierówności} Zadania w~sporej części pochodzą z~białostockiego koła PTM, url{ptm.pb.edu.pl}. defbareroger{includegraphics[height=1em]{jolly-roger-mat}} defroger{ hbox{bareroger{}} } subsection{Twierdzenie B`ezouta} Twierdzenie B`ezouta daje użyteczny, choć i~prosty trik do zwijania nierówności. Jeżeli mamy wielomian Q od zmiennych a, b i~podstawienie $a := b$ sprawia, że wielomian Q staje się zerem, to $Q = (a - b)cdot R$, gdzie R jest innym wielomianem. Przykładowo skoro $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ staje się zerem po podstawieniu $a := b$, więc $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = (a-b)cdot mbox{ COŚ}$. Przeliczenie daje $mbox{COŚ} = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, więc znowu możemy zapisać $mbox{COŚ} = (a-b)mbox{ COŚ}_2$ itd. Oczywiście twierdzenie nie jest potrzebne do tego, by tak zapisywać, ale warto wiedzieć, że można łatwo sprawdzić, czy da się wyłączyć $a - b$ przed nawias. Ten sam trik działa oczywiście również dla podstawienia $a := 3b$ itd. begin{problem} Liczby a, b są rzeczywiste dodatnie. We wszystkich poniższych nierównościach zastąp bareroger{} jednym ze znaków: geq, leq po czym udowodnij otrzymaną nierówność. begin{enumerate} item $ab^{n-1} + a^{n-1}b roger a^n + b^n$, gdzie n jest całkowite dodatnie. item $a^{-1}b^{n+1} + a^{n+1}b^{-1} roger a^n + b^n$, gdzie n jest całkowite dodatnie. item $a^{k}b^{n-k} + a^{n-k}b^{k} roger a^n + b^n$, gdzie n jest całkowite dodatnie, zaś k jest całkowite z~przedziału $[0, n]$. item $n(a-b)(a^{n-1} + b^{n-1})roger 2(a^n - b^n)$, gdzie $nin mathbb{Z}_+$. item $(1+a^3)^2(1+b^3) roger (1+ab^2)^3$. end{enumerate} end{problem} begin{problem} Liczby dodatnie a, b, c są takie, że [abc = 1mbox{ oraz } a + b + c > a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}.] Wykaż, że dokładnie jedna z~tych liczb jest większa od 1. end{problem} subsection{Średnie} begin{problem} Liczby $x_1, ldots ,x_n$ są dodatnie. We wszystkich poniższych nierównościach zastąp bareroger{} jednym ze znaków: geq, leq po czym udowodnij otrzymaną nierówność. begin{enumerate} item $frac{1}{n}left(x_1^2 + ldots + x_n^2 right) roger left(frac{x_1 + ldots + x_n}{n}right)^2$, item $frac{1}{n}left(sqrt{x_1} + ldots + sqrt{x_n} right) roger sqrt{frac{x_1 + ldots + x_n}{n}}$, item $frac{1}{n}left(sqrt[3]{x_1} + ldots + sqrt[3]{x_n} right) roger sqrt[3]{frac{x_1 + ldots + x_n}{n}}$. end{enumerate} end{problem} begin{problem} Liczby dodatnie $a_1, ldots ,a_n$ sumują się do 1. Wyznacz, w~zależności od n, najmniejszą możliwą wartość wyrażenia [frac{a_1}{2 - a_1} + ldots + frac{a_n}{2 - a_n}.] end{problem} begin{problem} Liczby x, y, z, t są nie mniejsze od $1/4$ i~spełniają równość $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Wyznacz najmniejszą i~największą wartość, jaką może przyjąć iloczyn $xyzt$. end{problem} begin{problem} Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, ldots ,x_n$ zachodzi nierówność [x_1 x_2 ldots x_n leq frac{x_1^2}{2} + frac{x_2^4}{4} + frac{x_3^8}{8} + ldots + frac{x_n^{2^n}}{2^n} + frac{1}{2^n}.] end{problem} begin{problem}[*] Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność [6(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)leq 9(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)^3.] end{problem} end{document}