** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setlist{noitemsep} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{11cm} defheadpicture{stala} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{13 grudnia 2013} begin{document} section{Nierówność Jensena dla x^{alpha}} emph{Zdecydowana większość materiału jest bezczelnie zerżnięta z~wykładu Oli Baranowskiej z~Proserw

2011, zachęcam do porównania. Inne możliwe źródła to {normalfonturl{matma.ilo.pl}}, czy google~--- jest sporo wyników z~zadaniami.} begin{defn} mbox{}vskip 0mm begin{minipage}{8cm} Funkcja $f:[a,b]rightarrowmathbb{R}$ jest emph{wypukła} wtedy i~tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x,yin[a,b]$ i~dowolnej liczby $tin[0,1]$ zachodzi nierówność: [f(tx+(1-t)y)leq tf(x)+(1-t)f(y).] Gdy nierówność zachodzi w~drugą stronę, funkcja jest wklęsła. end{minipage}begin{minipage}{7cm} includegraphics{wypukle} end{minipage} end{defn} Nas w~zasadzie odchodzi jedynie wniosek: begin{cor} Niech $alpha$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Jeżeli $alpha > 1$ lub $alpha < 0$ to funkcja $f(x) = x^{alpha}$ jest wypukła. Jeżeli $alphain (0, 1)$, to funkcja ta jest wklęsła. end{cor} Na przykład funkcja x^2 jest wypukła, zaś funkcja $sqrt{x}$ jest wklęsła. Ogólnie, jeżeli istnieje druga pochodna funkcji f, to f jest wypukła na $[a, b]$ wtedy i~tylko wtedy, gdy druga pochodna jest nieujemna na $[a, b]$. Podobnie f jest wklęsła, jeżeli druga pochodna f jest niedodatnia. begin{thm}[nierówność Jensena] Niech $f:mathbb{R}_+rightarrowmathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Jeżeli liczby $x_1,x_2,dots,x_n$ są dodatnie, zaś liczby underline{nieujemne} $alpha_1,alpha_2,dots,alpha_n$ sumują się do 1, to zachodzi [f(alpha_1 x_1+alpha_2 x_2+dots+alpha_n x_n)leqalpha_1 f(x_1)+alpha_2 f(x_2)+dots+alpha_n f(x_n)] Jeśli funkcja jest wklęsła, nierówność zachodzi w~drugą stronę. end{thm} Liczby $alpha_1, ldots ,alpha_n$ nazywamy emph{wagami}, najczęściej używamy wag $alpha_1 = alpha_2 = ldots = alpha_n = 1/n$ lub wag $alpha_1 = x_1/(x_1 + ldots + x_n), alpha_2 = x_2/(x_1 + ldots + x_n), ldots ,alpha_n = x_n(x_1 + ldots + x_n)$. begin{problem} Wykaż, że dla dowolnych a,b,c dodatnich zachodzi [3a^2+3b^2+3c^2geq(a+b+c)^2.] end{problem} begin{problem} Dowiedź, że jeśli a,b,c są dodatnie i sumują się do 1, to [a^3+b^3+c^3geq(a^2+b^2+c^2)^2.] end{problem} begin{problem} Niech $x_1, ldots ,x_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. begin{enumerate} item Udowodnij, że zachodzi tzw.~nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i~kwadratową [frac{x_1 + ldots + x_n}{n} leq sqrt{frac{x_1^2 + ldots + x_n^2}{n}}.] item Udowodnij, że zachodzi tzw.~nierówność pomiędzy średnią kwadratową i~sześcienną, tzn. [sqrt{frac{x_1^2 + ldots + x_n^2}{n}} leq sqrt[3]{frac{x_1^3 + ldots + x_n^3}{n}}.] end{enumerate} end{problem} begin{problem} Udowodnij nierówność [sqrt[3]{3+sqrt[3]{3}}+sqrt[3]{3-sqrt[3]{3}}leq 2sqrt[3]{3}.] end{problem} begin{problem} Wykaż, że dla dowolnych x,y,z dodatnich zachodzi [xsqrt{y+z}+ysqrt{x+z}+zsqrt{x+y}leqsqrt{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}.] end{problem} subsection{*Nierówność Jensena dla funkcji innych niż x^{alpha}.} begin{problem} Pokaż, że dla $x,y,zinmathbb{R}_+$ takich, że $x+y+z=1$ zachodzi [frac{3x+1}{x+1}+frac{3y+1}{y+1}+frac{3z+1}{z+1}leqfrac{9}{2}.] end{problem} begin{problem} Pokaż, że jeśli a,b,c są liczbami dodatnimi sumującymi się do 1, to zachodzi [sqrt{(b+c)(2a+b+c)}+sqrt{(a+c)(a+2b+c)}+sqrt{(a+b)(a+b+2c)}leq 2sqrt{2}.] end{problem} end{document}