** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Fri Feb 14 10:00 AM 2014 C % Last Change: Fri Feb 14 10:00 AM 2014 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{hintcounter} newenvironment{hint}[1][Wskazówka]{ vskip 3mm stepcounter{hintcounter}% noindent{textsc{{bfseries #1 thehintcounter{}}}}\} { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{9cm} defheadpicture{sierpinski_valentine} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{14.02.2014} begin{document} section{Przedomowe kółko} begin{problem} Niech H będzie punktem przecięcia wysokości trójkąta nieprostokątnego ABC. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AHB, BHC i~CHA są przystające. end{problem} begin{problem} Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D~prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że równoległoboki $ABCD$ i~$AEKL$ mają równe pola. end{problem} begin{problem} Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w~okrąg. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w~trójkąty BCD, CDA, DAB oraz ABC są wierzchołkami prostokąta. end{problem} begin{problem} Dana jest liczba pierwsza $pgeq 3$ oraz dwie liczby całkowite dodatnie~a, b takie, że liczby $a+b$ oraz $a^{10}+b^{10}$ dzielą się przez~p. Udowodnić, że a i~b dzielą się przez~p. end{problem} begin{problem} Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie [a^2+b^2+c^2=4abc.] end{problem} begin{problem} Na turnieju rycerskim każdy uczestnik posiada wśród pozostałych co najwyżej trzech śmiertelnych wrogów. Udowodnij, że można podzielić uczestników turnieju na dwie grupy tak, by dowolny uczestnik posiadał w~swojej grupie co najwyżej jednego śmiertelnego wroga. emph{Uwaga: Jeżeli rycerz A jest śmiertelnym wrogiem rycerza B, to rycerz B jest śmiertelnym wrogiem rycerza A.} end{problem} begin{problem} Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność $$ frac{1}{a+b+c}+frac{1}{d+a+b}+frac{1}{c+d+a}+frac{1}{b+c+d}geq frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$ end{problem} begin{problem} Wykazać, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta ostrokątnego to zachodzą nierówności begin{enumerate} item $a^2 < b^2 + c^2$, item $(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + a^2 - b^2) leq (a+b-c)^2(c+a-b)^2$. end{enumerate} end{problem} newpage subsection*{Wskazówki} begin{hint} Niech $alpha := angle BAC$, wtedy kąt $ angle BHC = 180^circ - alpha$. Niech H' będzie odbiciem symetrycznym H względem BC, wtedy H' leży na okręgu opisanym na $ triangle ABC$, więc okręgi opisane na $ triangle ABC$ i~$ triangle BCH$ są symetryczne względem BC, w~szczególności mają równe promienie. end{hint} begin{hint} Pole trójkąta ADE to połowa pola każdego z~równoległoboków $ABCD$ i~$AEKL$. end{hint} begin{hint} Niech I_1 oraz I_2 oznacza odpowiednio środek okręgu wpisanego w~$triangle ABC$ oraz $triangle BCD$. Niech E będzie drugim punktem przecięcia prostej AI_1 z~okręgiem opisanym na $ABCD$. Wtedy $EB = EI_1 = EC$ na mocy ,,lemaciku''. Punkt E jest też drugim punktem przecięcia prostej DI_2 z~okręgiem opisanym na $ABCD$, więc również $EI_2 = EB = EC$. Wobec tego punkty B, I_1, I_2, C leżą na jednym okręgu i~$ angle CI_2 I_1 = 180^circ - angle I_1 B C$. Podobnie $ angle CI_2 I_3 = 180^circ - angle I_3 D C$, gdzie I_3 jest środkiem okręgu wpisanego w~trójkąt ACD. Stąd $ angle I_1 I_2 I_3 = 90^circ$. end{hint} begin{hint} Mamy $a equiv -bmod p$ i~$a^{10} equiv -b^{10}mod p$, więc $2a^{10} equiv 0 mod p$. end{hint} begin{hint} Niech k będzie największą taką liczbą, że $2^kmid a$, $2^k mid b$, $2^k mid c$ i~niech $a = 2^k a'$, $b = 2^k b'$, $c = 2^k c'$. Wtedy [a'^2 + b'^2 + c'^2 = 4cdot 2^kcdot a'b'c'.] Kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez 4, zaś kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 z~dzielenia przez 4. Z~definicji liczby k, co najmniej jedna z~liczb a', b', c' jest nieparzysta. Wobec tego reszta z~dzielenia przez 4 lewej strony równania powyżej to $1+0+0=1$ lub $1+1+0=2$ lub $1+1+1 = 3$.

W~szczególności lewa strona jest niepodzielna przez 4, sprzeczność! end{hint} begin{hint} Rozważmy wszystkie możliwe podziały rycerzy i~wybierzmy ten podział $mathcal{P}$, w~którym liczba par śmiertelnych wrogów w~jednej grupie jest minimalna. Załóżmy, że w~tym podziale pewien rycerz A ma w~swojej grupie co najmniej dwóch śmiertelnych wrogów. Rozważmy nowy podział $mathcal{P}'$, w~którym A przeniesiony jest do drugiej grupy. W~tej grupie A ma co najwyżej jednego śmiertelnego wroga. Wobec tego przy podziale $mathcal{P}'$ liczba par śmiertelnych wrogów w~jednej grupie jest mniejsza niż przy podziale $mathcal{P}$. Sprzeczność z~definicją $mathcal{P}$! end{hint} begin{hint} Zastosujmy nierówność między średnią arytmetyczną a~harmoniczną dla liczb $a+b+c$, $d+a+b$, $c+d+a$, $b+c+d$: [frac{4}{frac{1}{a+b+c}+frac{1}{d+a+b}+frac{1}{c+d+a}+frac{1}{b+c+d}}leq frac{(a+b+c) + (d+a+b) + (c+d+a) + (b+c+d)}{4}.] Powyższa nierówność jest równoważna wyjściowej. end{hint} begin{hint} 1. Niech odpowiednio A, B, C będą wierzchołkami trójkąta leżącymi naprzeciw boków a, b, c. Niech H będzie rzutem B na bok(nie proste!) AC. Wtedy $BH < BA = c$ oraz $CH < AC = b$. Wobec tego $a^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2 < c^2 + b^2$.\ 2. Nierówność jest równoważna $2a^2(b-c)^2 leq (b^2 - c^2)^2 + (b-c)^4$. Używamy 1. i~otrzymujemy nierówność $0leq (b-c)^2((b+c)^2 + (b-c)^2 - 2a^2) = 2(b-c)^2(b^2 + c^2 - a^2)$. end{hint} end{document}