Wpisany przez Joachim Jelisiejew
poniedziałek, 31 marca 2014 15:00 -

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: hardsze-nierownosci.tex % Created: Mon Mar 31 11:00 AM 2014 C % Last Change: Mon Mar 31 11:00 AM 2014 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=18cm, textheight=26.5cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{10cm} defheadpicture{final-countdown} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{31 marca 2014} begin{document} vspace*{-1cm} section{Large We've learning together,\but still its so lateldots } subsection{Nieco przypomnienia --- jedno-monotoniczne} defmono#1#2{leftlceilbegin{matrix}#1\#2end{matrix}rightrfloor} Jeżeli mamy ciągi liczb rzeczywistych $a_1,dots,a_n, b_1,dots, b_n$ to [mono{a_1&a_2&dots&a_n}{b_1&b_2&dots&b_n} := a_1b_1 + a_2b_2 + dots + a_nb_n.] jest fajnym zapisem czegoś oczywistego. Przykładowo $5 = mono{2& 1}{2& 1} > mono{1& 2}{2& 1} = 4$. To jest ogólniejszy fenomen: begin{thm} Weźmy ciągi niemalejące $a_1 leq a_2 leq dots leq a_n$ oraz $b_1 leq b_2leq dots leq b_n$. Jeżeli $b_1',dots, b_n'$ jest permutacją ciągu $b_1,dots, b_n$, to [mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b_n & b_{n-1} & dots & b_1}leq mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b'_1 & b'_2 & dots & b'_n}leq mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b_1 & b_2 & dots & b_n}.] Innymi słowy: największą wartość osiągamy układając ciągi zgodnie, najmniejszą~--- przeciwnie. end{thm} subsection{Nieco przypomnienia~--- Jensen} begin{thm}[nierówność Jensena] Niech $f:mathbb{R}_+to mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Jeżeli liczby $x_1,x_2,dots,x_n$ są dodatnie, zaś liczby nieujemne $alpha_1,alpha_2,dots,alpha_n$ sumują się do 1, to zachodzi [f(alpha_1 x_1+alpha_2 x_2+dots+alpha_n x_n)leqalpha_1 f(x_1)+alpha_2 f(x_2)+dots+alpha_n f(x_n)] Jeśli funkcja jest wklęsła, nierówność zachodzi w~drugą stronę. end{thm} subsection{Nieco niebanalnych (nie)zadanek} begin{problem} Rozstrzygnij, który ze znaków leq, geq (jeżeli którykolwiek) można wstawić w~miejsce $square$ tak, by otrzymana nierówność była prawdziwa dla wszystkich liczb a, b, c, d rzeczywistych dodatnich [a^4b + b^4c + c^4d + d^4a square a^3bc + b^3cd + c^3da + d^3ab.] end{problem} begin{problem}[Warsztaty Mat. 2010] Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, ldots ,a_{2014}$. Wykaż, że zachodzi nierówność [sum_{j=1}^{2010} frac{a_j^2}{a_j + a_{j+1}} geq frac{1}{2}sum_{j=1}^{2010} a_j.] end{problem} begin{problem}[OM 2001] Niech $x_1, ldots ,x_{2014}$ będą liczbami nieujemnymi. Pokaż, że [sum_{i=1}^{2014} x_i^{i} + binom{2014}{2} geq sum_{i=1}^{2014} icdot x_i.] end{problem} begin{problem}[Olimpiada Ukraińska 96] Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność [frac{a^3}{b + 2c} + frac{b^3}{c + 2a} + frac{c^3}{a + 2b} geq frac{a + b + c}{3}.] emph{Częściowa wskazówka: można przepałować, zrobić z~ciągów jednomonotonicznych, z~Jensena albo pochodnymi.} end{problem} begin{problem} Rozstrzygnij, który ze znaków leq, geq (jeżeli którykolwiek) można wstawić w~miejsce $square$ tak, by otrzymana nierówność była prawdziwa dla wszystkich liczb a, b, c rzeczywistych dodatnich [a^4b + b^4c + c^4a square a^3bc + b^3ca + c^3ab.] emph{To zadanie pokazuje różnicę pomiędzy nierównościami w~trzech i~czterech zmiennych.} end{problem} end{document}