** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Thu Feb 14 01:00 PM 2013 C % Last Change: Thu Feb 14 01:00 PM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=3.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{10cm} defheadpicture{sierpinski_valentine} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{14 lutego 2013} begin{document} section{Kółko przed olimpiadą,\large czyli byle do wiosny!} begin{problem} Na herbatce na II etapie OMa jest n dziewcząt i~n chłopców. Każda dziewczyna lubi

r chłopców, a~każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Wykaż, że jeżeli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a~jeżeli $r+sleq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione. end{problem} begin{problem} Dane są liczby $a_1,a_2,dots,a_n$ takie, że $a_iin {1,-1}$ dla $i=1,2,dots,n$ oraz $$a_1a_2 + a_2a_3 + dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$ Udowodnij, że n jest podzielne przez 4. end{problem} begin{problem} Liczby dodatnie a,b,c spełniają $abc=1$. Udowodnij, że $$frac{a}{b} + frac{b}{c} + frac{c}{a} geq a + b + c.$$ emph{Wskazówka: dla liczb o~iloczynie równym 1 mamy jedno miłe podstawienie.} end{problem} begin{problem}[dla Damiana] W~trójkąt ABC wpisano okrąg, tak, że jest on styczny do boku AB w punkcie D. Wykaż, że okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają punkt wspólny. end{problem} begin{problem} Wykazać, że jeżeli $a>3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, to dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $$a^{2^n} - 1$$ ma co przynajmniej $n+1$ różnych dzielników pierwszych. end{problem} begin{problem} Wykaż, że każde dwie spośród liczb [2^{2^0} +1, 2^{2^{1}} + 1, 2^{2^{2}} + 1,dots, 2^{2^{n}} + 1,dots] są względnie pierwsze. end{problem} begin{problem}[dodatkowe] Wielomian $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + dots + a_0$ ma współczynniki leżące w~przedziale $[-1, 1]$. Udowodnij, że nie ma on pierwiastków zawartych w~przedziale $(-infty, -2] cup [2, infty)$. end{problem} end{document}