

Zadania z Dirichleta są przeznaczone **do domu**! Będziemy je omawiać na następnym kółku. Y.



[
Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
% File: wstep.tex % Created: Mon Oct 22 10:00 PM 2012 C % Last Change: Mon Oct
22 10:00 PM 2012 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=17cm,
textheight=27.5cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem}
setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} %usepackage{MnSymbol}
% ----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small %
THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}
newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm}
stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm}
includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture}
end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center
#1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{}
end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{
vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][
stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}} { }
defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant}
renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} pagestyle{empty}
```

defsectionwidth{9cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko l~LO Białystok}

defdate{23 października} begin{document} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}}

section{Large A~może tak spróbować sinusów?} subsection{Początek i~koniec trygonometrii}

emph{Twierdzenie sinusów jest nakładką na geometrię klasyczną (bo dowód jest prosty).}

Generalnie textbf{nie} należy go używać w~rozwiązaniach, bo $\sin 0 = 0$, więc nie dla wszystkich kątów ma ono sens!

begin{thm}[Twierdzenie sinusów] Jeżeli ABC jest trójkątem, a R oznacza promień okręgu opisanego na nim to
$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{CA}{\sin \angle CBA} = 2R.$$
 end{thm}

begin{proof}[Szkic dowodu] Niech AA' będzie średnicą okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Wtedy kąt $\angle ACA'$ jest prosty więc z definicji sinusa dla trójkąta prostokątnego $\triangle AAC'$ mamy $2R \cdot \sin \angle CA'A = AC$. Co więcej $\angle CA'A = \angle CBA$ lub $\angle CA'A = 180^\circ - \angle CBA$, w obu przypadkach $\sin \angle CA'A = \sin \angle CBA$. To dowodzi, że ostatni ułamek jest równy $2R$, z dokładnością do oznaczeń udowadniamy to identycznie dla pozostałych. end{proof}

begin{problem}[(twierdzenie o~dwusiecznej)] Dwusieczna kąta $\angle BCA$ w trójkącie ABC przecina bok AB w punkcie D . Udowodnij, że
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$
 end{problem}

begin{problem} Uzasadnij, że pole trójkąta $\triangle ABC$ wyraża się wzorem
$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC.$$
 Udowodnij ponownie twierdzenie sinusów (bez części $= 2R$) korzystając z powyższego. end{problem}

begin{problem} Udowodnij, że pole czworokąta o~przekątnych długości k i l , przecinających się pod kątem α , jest równe
$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot l \cdot \sin \alpha.$$
 Które z~czworokątów o~danych długościach przekątnych mają największe możliwe pole? end{problem}

subsection{Dirichleta ciąg dalszy} begin{problem} Wykazać, że wśród $10^{10} + 1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2 \cdot 10^{10}\}$ są dwie liczby względnie pierwsze. Wykazać, że istnieje zbiór 10^{10} liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2 \cdot 10^{10}\}$ w którym każde dwie liczby mają wspólny dzielnik większy od 1 . end{problem}

begin{problem} Wykaż, że jeśli dziesięć liczb całkowitych ma sumę 101 , to muszą wśród nich być trzy, których suma wynosi co najmniej 31 . end{problem}

begin{problem} Niech A będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 150\}$ złożonym z ≤ 25 liczb. Wykaż, że istnieją dwie różne pary elementów zbioru A mające równe sumy. end{problem}

begin{problem} Niech A będzie dziesięcioelementowym podzbiorem zbioru $\{3, 6, 9, \dots, 150\}$. Wykaż, że A zawiera dwa różne czteroelementowe podzbiory, mające równe sumy elementów. end{problem}

begin{problem}[*] Dany jest zbiór Ψ złożony z ≤ 24 liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 100 . Uzasadnij, że w zbiorze liczb postaci $a - b$ gdzie $a, b \in \Psi$ są różnymi elementami Ψ są co najmniej cztery różne liczby. end{problem}

begin{problem}[*] Uzasadnij, że dla każdego n całkowitego dodatniego istnieje liczba Fibonacciego podzielna przez n . emph{Uwaga: liczba Fibonacciego to element ciągu danego wzorem $F_1 = 1, F_2 = 1$ oraz zależnością $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 1$. Wskazówka: nie wystarczy wziąć n elementów ciągu.} end{problem} end{document}