** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: masy2013.tex % Created: Tue May 07 10:00 AM 2013 C % Last Change: Tue May 07 10:00 AM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage{multicol} usepackage[textwidth=16cm, textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{9cm} defheadpicture{wyniczki.png} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{7 maja 2013} begin{document} section{Środek masy\{scriptsize Dajcie mi punkt podparcia, a~poruszę

Ziemię.}} emph{To kółko jest w~dużej części powieleniem starszych; zachęcam do pooglądania rozwiązań na matma.ilo.pl, w~szukaj ``środek masy''. Zadania pochodzą również z~deltami i~Staszica.} subsection{Teoria} Wszędzie poniżej zakładamy, że jesteśmy w~płaszczyźnie lub w~przestrzeni i~że mamy dany pewien układ współrzędnych (kartezjańskich). Nie będę o~tym mówić, ale rozważania nie zależą od wyboru układu. Dla wygody oznaczeń definiujemy też operacje na punktach -- mnożenie przez liczbę rzeczywistą i~dodawanie. Niech $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ oraz $Kin mathbb{R}$. Wtedy [A + B = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)] [Kcdot A = K(a_1, a_2) := (Ka_1, Ka_2)] emph{Jeżeli ktoś woli: są to ``szkolne'' operacje mnożenia przez skalar i~dodawania wektorów. Równie dobrze można to robić w~trzech wymiarach.} Rozważamy punkty z~masami tj. pary $(A, m)$, gdzie $A$ jest punktem, a~$m$ jest liczbą rzeczywistą (niekoniecznie dodatnią!) czyli ``masą''. begin{defn} textbf{Środkiem masy} układu punktów $(m_1, A_1), cdots, (m_n, A_n)$ jest punkt (z~masą): [left(frac{m_1cdot A_1 + cdots + m_ncdot A_n}{m_1 + cdots + m_n}, m_1 + cdots + m_nright)] o~ile $m_1 + cdots + m_n neq 0$. Jeżeli $m_1 + cdots + m_n = 0$ to mówimy, że układ textbf{nie posiada środka masy}. Wszędzie poniżej unikamy obliczania środków masy układów o~sumie mas zerowej. end{defn} begin{thm}[o~przegrupowywaniu] Załóżmy, że układ $(A_1, m_1), cdots, (A_n, m_n)$ ma środek masy $mathcal{M}$ i~układ $A_1,cdots,A_l$ ma środek masy M, wtedy układ $M, A_{l+1}, cdots, A_n$ także ma środek masy $mathcal{M}$. end{thm} emph{Intuicyjnie: chcąc obliczyć środek masy możemy zamieniać część punktów na ich środek masy, wyróżniłem akurat punkty $A_1,cdots,A_l$ tylko ze względu na prostotę oznaczeń ;)} begin{proof} Obliczam [mathcal{M} = left(frac{m_1A_1 + cdots + m_nA_n}{m_1 + cdots + m_n}, m_1 + cdots + m_nright)quad M = left(frac{m_1A_1 + cdots + m_lA_l}{m_1 + cdots + m_l}, m_1 + cdots + m_l right)] Suma mas układu $M,(A_{l+1}, m_{l+1}), cdots, (A_n, m_n)$ to $(m_1 +cdots + m_l) + m_{l+1} + cdots + m_n$, czyli jest ona niezerowa (bo to masa całego układu) więc~środek masy istnieje i~wyraża się wzorem [left(frac{(m_1 + cdots + m_l)frac{m_1A_1 + cdots + m_lA_l}{m_1 + cdots + m_l} + m_{l+1}A_{l+1} + cdots + m_nA_n}{(m_1 + cdots + m_l) + m_{l+1} + cdots + m_n}, (m_1 + cdots + m_l) + m_{l+1} + cdots + m_nright) = mathcal{M}] end{proof} begin{cor} Twierdzenie sprowadza liczenie środka masy do liczenia środka masy dwóch punktów. end{cor} textbf{Uwaga:} jak widać, teoria środka masy jest ``nakładką'' na liczenie współrzędnych punktów w~układzie współrzędnych. Nie daje jej to, a~priori, wielkiej siły rażenia, ale wiele zadań polega na problemie typu ``to się da policzyć, ale to boli!'' i~wtedy jest to przydatne. subsection{Pytania i~zadania wstępne} begin{enumerate} item Gdzie leży środek masy układu złożonego z~jednego punktu? item Gdzie leży środek masy układu złożonego z~dwóch punktów? item Załóżmy, że punkty A, B, C tworzą trójkąt. Czym są (jaka jest konstrukcja) punkty będące środkami ciężkości układów: begin{multicols}{2} begin{itemize} item $(A, 0), (B, 1), (C, 1)$, item $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$, item $(A, -1), (B,1), (C, 0)$, item $(A, -1), (B,1), (C, 1)$? end{itemize} end{multicols} end{enumerate} begin{problem}[Zmiana jednostki]label{scaling} Uzasadnij, że środek masy nie zmieni się, jeżeli wszystkie masy układu pomnożymy przez liczbę dodatnią. end{problem} subsection{Zadania nieco prostsze} begin{problem} Uzasadnij, że w~trójkącie trzy środkowe przecinają się w~jednym punkcie, który dzieli każdą z~nich w~stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka. end{problem} begin{problem} Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem i niech K,L,M,N będą środkami boków AB,BC,CD,DA odpowiednio. Udowodnij, że KM i

LN połowią się, więc $KLMN$ jest równoległobokiem i że środek tego równoległoboku pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki przekątnych. end{problem} begin{problem} Wykaż, że wszystkie osie symetrii wielokąta przecinają się w~jednym punkcie. end{problem} begin{problem} Czy dla dowolnego punkty S wewnątrz trójkąta ABC da się dobrać masy w~punktach A, B i~C, żeby środkiem masy było S? Czy fakt, że S leżał wewnątrz trójkąta miał znaczenie? end{problem} begin{problem} Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkty X, Y, Z, T leżą na bokach AB, BC, CD, DA odpowiednio, przy czym $AX/BX = DZ/CZ = 3$ oraz $BY/CY = AT/DT = 5$. Niech E będzie punktem przecięcia XZ i~YT. Ile wynosi XE/EZ, a~ile YE/TE? end{problem} begin{problem} Wykaż, że w~dowolnym czworościanie odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi przecinają się w~jednym punkcie. end{problem} subsection{$star$ Zadania nieco dots sami wiecie} begin{problem}[Twierdzenie Cevy] Punkty X,Y,Z leżą na bokach BC,CA,AB trójkąta ABC odpowiednio. Udowodnij, że proste AX,BY,CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy [frac{AZ}{BZ}cdotfrac{BX}{CX}cdotfrac{CY}{AY}=1] end{problem} begin{problem} Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC wybrano punkty Z, X, Y tak, że [frac{AZ}{BZ} = frac{BX}{CX} = frac{CY}{AY}.] Dowiedź, że środki ciężkości trójkątów ABC i~XYZ pokrywają się. end{problem} begin{problem} Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK=DL$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Dowieść, że prosta AP jest dwusieczną kąta BAD. emph{Wskazówka: warto użyć tw. o~dwusiecznej: dwusieczna $angle BAC$ dzieli bok BC w~stosunku AB/AC, żeby uniknąć kątów.} end{problem} begin{problem} Czy da się znaleźć takie punkty X, Y, Z, leżące na bokach BC, CA, AB pewnego trójkąta ABC takie, że proste AX, BY, CZ mają punkt wspólny M oraz [frac{AM}{MX} = frac{BM}{MY} = frac{CM}{MZ} = 3?] Dla jakich innych liczb dodatnich, zamiast 3, da się to zrobić? end{problem} begin{problem}[Twierdzenie val Aubela] Dany jest trójkąt ABC i~punkty X, Y, Z leżące na bokach odpowiednio BC, CA, AB. Proste AX, BY, CZ przecinają się w~punkcie M. Wykazać, że [frac{AM}{MX} = frac{AY}{CY} + frac{AZ}{BZ}.] end{problem} begin{problem}[Punkty szczególne w~trójkącie mające w~miarę strawne współrzędne barycentryczne; współrzędne barycentryczne to te masy, które kładziemy w~wierzchołkach.]label{distpoints} Udowodnić, że jeśli w~punktach A, B, C trójkąta położymy masy m_1, m_2, m_3 to środek ciężkości pokryje się z~następującym punktem szczególnym trójkąta ABC: vspace{2mm} begin{tabular}[]{|c|c|c|} hline Punkt & masy & objaśnienie\ hline środek ciężkości & $(1, 1, 1)$ &\ środek okręgu wpisanego & (a, b, c) & długości boków\ środek okręgu dopisanego do BC & $(-a, b, c)$ &\ środek okręgu opisanego & $(sin 2alpha, sin 2beta, sin 2gamma)$ & $alpha, beta, gamma$ to kąty przy A,B,C\ ortocentrum & $(tg alpha, tg beta, tg gamma)$ & Co to znaczy dla prostokątnego?\ &&Najlepiej domnożyć przez $sinalphasinbetasingamma$\ hline end{tabular} end{problem} begin{problem} Okrąg wpisany w~trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w~punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem boku BC, zaś odcinki AM i~EF przecinają się w~punkcie G. Wykaż, że proste GD i~BC są prostopadłe. emph{Wskazówka: znajdź masy takie, żeby środkiem był punkt G, a~potem, by środkiem był środek okręgu wpisanego.} end{problem} end{document}