** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: funkcje.tex % Created: Mon Jan 07 10:00 PM 2013 C % Last Change: Mon Jan 07 10:00 PM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=27cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{9cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{8 stycznia 2012} begin{document} section{Równania funkcyjne} Funkcje mogą być dowolne. Bardzo dowolne. I~bardzo ohydne. Tak, również tak ohydne. Nie muszą być liniowe. Nie muszą być wielomianami. Nie muszą być czymkolwiek ;) Główną metodą rozwiązywania równań funkcyjnych jest podstawianie za zmienne, żeby uzyskać nowe równania, a~potem skracanie ze starymi równaniami. Warto, niezależnie od tego, czy użyje się tego w~rozwiązaniu podstawiać (przy założeniu, że równanie uwzględnia zmienne x, y): $x = 0$, $x = y$, $x = f(y)$ itd., żeby skróciło się. Często przydaje się policzenie wartości w~konkretnym punkcie np. $f(0)$, co pokazuje trudności. I~oczywiście, zawsze warto zgadnąć odpowiedź. Cześć zadań wzięta z~texttt{http://kmo.umcs.lublin.pl/}. Dziękuję! begin{problem}[Milusie podstawienia, Śląski konkurs mat.] Funkcja $f:mathbb{R}to mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej równość [2f(x) + f(1-x) = 3x.] Znajdź wszystkie takie funkcje. end{problem} begin{problem}[Milusie podstawienia, jadziem dalej (i~dłużej)] Znajdź wszystkie funkcje $f:mathbb{R}to mathbb{R}$ spełniające, dla każdych $x, y in mathbb{R}$, równanie (są cztery różne podpunkty): begin{enumerate} item $f(x+ y) = f(x) - f(y)$, item $f(x+y) = f(f(x)) + y$, item $xf(x) + yf(y) = (x+y)f(x)f(y)$, item $f(y)f(x) - xy = f(x) + f(y) - 1$. end{enumerate} end{problem} begin{problem}[Funkcje na wymiernych] Funkcja $f: mathbb{R}in mathbb{R}$ spełnia warunki begin{enumerate} item $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y in mathbb{R}$, item $f(1) = 1$. end{enumerate} Wyznacz $f(9/32)$. end{problem} begin{problem}[Ograniczoność] Znajdź wszystkie funkcje $f:mathbb{R} to mathbb{R}$ bezwzględnie ograniczone (emph{tzn. takie, że istnieje stała C_f taka, że $forall_{xin mathbb{R}} |f(x)| leq C_f$}) i~spełniające, dla wszystkich rzeczywistych x, y, równanie $f(x+y) = f(x) + f(y)$. end{problem} begin{problem}[Paskudne dziedziny] Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}setminusleft{ 0, 1 right}to mathbb{R}$ spełniające równanie [f(x) + fleft(frac{x-1}{x} right) = 1 + x qquad mbox{ dla każdego } xin mathbb{R}setminusleft{ 0, 1 right}.] end{problem} begin{problem}[Monotoniczność, z~LXI OM] Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne $f:mathbb{R}to mathbb{R}$, że dla dowolnych $x, yin mathbb{R}$ zachodzi równość [fleft(f(x) - y right) + f(x + y) = 0.] end{problem} rule{linewidth}{0.2mm} begin{problem} Rozwiązać w~liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań [begin{cases} x^2 - (y+z+yz)x + (y+z)yz = 0 &\ y^2 - (z+x+zx)y + (z+x)zx = 0 &\ z^2 - (x+y+xy)z + (x+y)xy = 0. end{cases}] end{problem} begin{problem} W~pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykazać, że symetralna odcinka EA, symetralna odcinka BC i~dwusieczna kąta CDE przecinają się w~jednym punkcie. end{problem} end{document}