_

** **
_Zadania z kółka PDF._ _

** **
_ **Wstępny** Szkic rozwiązań serii III PDF.

**Źródło zadań w texu.**

% File: zad.tex % Created: Tue Dec 11 10:00 AM 2012 C % Last Change: Tue Dec 11 10:00 AM 2012 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=28cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % ------------------------------------------------------------ vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ------------------------------------------------------- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{}

end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{6cm} defheadpicture{nierownosc} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{11 grudnia 2012} begin{document} section{textsc{OM}ówienie} noindentbegin{minipage}[]{8cm} includegraphics[width=8cm]{11_1} end{minipage}begin{minipage}[]{8cm} includegraphics[width=8cm]{11_2} end{minipage} subsection*{Zadania świąteczne z~texttt{www.omg.edu.pl} i~nie tylko, łatwe i~nie tylko} begin{problem} Oznaczmy przez $[x]$ największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$. Uzasadnij, że tylko dla skończenie wielu liczb naturalnych $n$ liczba $[n^2/3]$ jest pierwsza. end{problem} begin{problem} Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$ zachodzi nierówność [ 1 + frac{1}{4} + frac{1}{9} + dots + frac{1}{n^2} leq frac{5}{3} - frac{2}{2n+1}. ] end{problem} emph{A~gdybyś chciał(a) potrenować trik z~dwunastego zadania, to poniższe (wzięte z~texttt{www.omg.edu.pl}) opiera się na podobnym pomyśle, tylko trzeba dokładnie szacować (z~pomocą kalkulatora?)} begin{problem} Udowodnij, że istnieje $10^{100}$ kolejnych liczb całkowitych dodatnich nie większych od $10^{2012}$, z~których żadna nie jest postaci $a^3 + b^4 + c^5 + d^6$, gdzie $a, b, c, d$ są liczbami całkowitymi dodatnimi. end{problem} subsection*{Teoria z~$11$ i~dalszych okolic rozpisana na zadania} begin{problem} Dany jest kąt $ACB$. Udowodnij, że zbiór punktów równoodległych od jego ramion składa się z~dwusiecznej kąta $ACB$ i~dwusiecznej kąta przyległego do $ACB$. end{problem} begin{problem}[Okrąg Apoloniusza] Weźmy na płaszczyźnie różne punkty $A, B$ oraz liczbę dodatnią $kneq 1$. Udowodnij, że zbiór $mathcal{O}$ punktów $X$ takich, że $Xneq A, B$ oraz [frac{|AX|}{|BX|} = k] jest okręgiem o~środku leżącym na prostej $AB$. emph{Rozpisanie zadania na podpunkty (można inaczej np. przez przeliczenie na współrzędnych):} begin{enumerate} item Dla $Xin mathcal{O}$ nie leżącego na prostej $AB$ oznaczmy przez $D, E$ punkty przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznego i~zewnętrznego $AXB$ z~prostą $AB$. Dowiedź, że $D, Ein mathcal{O}$ i~położenie punktów $D, E$ nie zależy od $X$. item Uzasadnij, że wszystkie punkty z~$mathcal{O}$ leżą na okręgu o~średnicy $DE$. item Weź dowolny punkt na okręgu o~średnicy $DE$ i~wykaż, że należy on do $mathcal{O}$. end{enumerate} end{problem} newpage vspace*{2cm} includegraphics[width=16cm]{11_2rozw} end{document} % File: rozw_3seria.tex % Created: Tue Dec 11 05:00 PM 2012 C % Last Change: Tue Dec 11 05:00 PM 2012 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=26cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % ------------------------------------------------------------ vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ------------------------------------------------------- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{12cm} defheadpicture{nierownosc} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{11 grudnia 2012} begin{document} section{Nieoficjalny i~niefirmowy OM. Wersja $beta$.} emph{Wywieszam w~ramach uzupełnienia tego, co było na kółku. Moim zdaniem to są rozwiązania, które (prawdopodobnie) uzyskałyby 6 pkt i~są przy tym krótkie (ale nie najkrótsze, jakie moim zdaniem dostałyby 6 -- część rzeczy można byłoby pominąć). Treści, które można pominąć i~komentarze są zaznaczone kursywą.} textbf{Uwaga: pisałem na szybko, więc mogą być błędy, zwłaszcza w~9dots Mam nadzieję, że ktoś sprawdzi, gdyby było widać coś podejrzanego~--- proszę o~informację.} setcounter{problem}{8} begin{problem} Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w~punktach $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ i~$(1, 1)$. W~jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i~przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z~pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej. end{problem} begin{sol} Dowiedziemy, że nie jest możliwe, by po pewnej liczbie ruchów kamienie leżały na jednej prostej. Oznaczmy przez $PP, PN, NP, NN$ kamienie leżące początkowo w~punktach $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ i~$(1, 1)$ odpowiednio. emph{Punktem symetrycznym do punktu $(x, y)$ względem punktu $(x_2, y_2)$ jest punkt $(2x_2 - x, 2y_2 - y)$.} Rozważmy jeden ruch: kamień $k$ leżący na $(x, y)$ odbijamy względem kamienia leżącego na $(x_2, y_2)$. Po ruchu kamień $k$ ma współrzędne $(2x_2 - x, 2y_2 -y)$, więc jego współrzędne są całkowite i~dają takie same reszty z~dzielenia przez $2$, jak przed ruchem emph{(bo np. $2x_2 - x = 2(x_2 - x) +x$, czyli zmieniamy współrzędne o~liczbę parzystą, tak samo dla $y$)}. Wobec tego po każdej liczbie ruchów kamienie mają współrzędne całkowite i~tej samej parzystości, co ma początkuemph{ czyli np. $PN$ ma współrzędną pierwszą parzystą, a~drugą nieparzystą}. % Załóżmy, że po pewnej liczbie ruchów pewne trzy kamienie $A = (x_A, y_A), % B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$ leżą na jednej % prostej $k$. Rozważmy nowy układ współrzędnych, w~którym kamień $A$ leży % w~punkcie $(0, 0)$, innymi słowy przesuńmy o~$A$. Kamienie $B, C$ % mają wtedy współrzędne $B' = (x_B - x_A, y_B - y_A), C' = (x_C - x_A, y_C % - y_A)$ i~leżą na pewnej prostej przechodzącej przez $0$. Zapiszmy % równanie tej prostej jako % [alpha y + beta x = 0.] begin{lem} Punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ leżą na jednej prostej wtedy i~tylko wtedy, gdy [ (x_1 - x_2)cdot (y_1 - y_3) = (x_1 - x_3)cdot (y_1 - y_2). ] Uwaga: tutaj potrzeba źródła, tego tu brakuje, nie piszę, pytajcie np. Marysi!!! end{lem} Pozostaje sprawdzić, że ta równość nie jest spełniona dla żadnej trójki kamieni. Są cztery trójki, więc i~cztery przypadki (identyczne, warto zrozumieć, dlaczego). begin{enumerate} item Kamienie $PP = (x_1, y_1), PN = (x_2, y_2), NP = (x_3, y_3)$ leżą na jednej prostej. Podstawiamy ich współrzędne otrzymując [

(x_1 - x_2)cdot (y_1 - y_3) = (x_1 - x_3)cdot (y_1 - y_2). ] Wiemy, że liczby $x_1, y_1, x_2, y_3$ są parzyste, a~liczby $y_2, x_3$ są nieparzyste emph{(sprawdź z~początkowymi współrzędnymi)}. Wobec tego lewa strona jest parzysta, a~prawa nieparzysta. item Kamienie $PP, PN, NN$ emph{(Uwaga: zmieniona kolejność!)}. Jak wyżej, lewa strona jest parzysta, a~prawa nieparzysta. item Kamienie $PP, NN, NP$. Identycznie jak w~poprzednim przypadku. item Kamienie $PN, NP, NN$. Identycznie jak w~poprzednim przypadku. end{enumerate} end{sol} begin{problem} Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech $alpha, beta, gamma$ będą kątami utworzonymi przez przekątną $AC'$ z~krawędziami $AB, AD$ i~$AA'$. Udowodnić, że [ tg alpha + tg beta + tg gamma leq frac{3}{2}tg alpha cdot tg beta cdot tg gamma. ] end{problem} begin{sol} Kąty $alpha, beta, gamma$ są ostre, więc ich tangensy są liczbami dodatnimi. Nierówność z~zadania możemy więc podzielić stronami przez $tg alphacdot tg betacdot tggamma$ otrzymując deftga{tgalpha} deftgb{tgbeta} deftgc{tggamma} begin{equation} label{mainthm} frac{1}{tgacdot tgb} + frac{1}{tgbcdot tgc} + frac{1}{tgccdot tga} leq frac{3}{2}. end{equation} Oznaczmy $a:=|AB|, b:=|AD|, c:=|AA'|$, z~twierdzenia Pitagorasa $|BC'| = sqrt{b^2 + c^2}, |DC'| = sqrt{a^2 + c^2}, |A'C'| = sqrt{a^2 + b^2}$. Z~definicji $tg$ mamy [ tg alpha = frac{|BC'|}{|BA|} = frac{sqrt{b^2 + c^2}}{a},quadtg beta = frac{|DC'|}{|DA|} = frac{sqrt{a^2 + c^2}}{b},quad tg gamma = frac{|A'C'|}{|A'A|} = frac{sqrt{a^2 + b^2}}{c}. ] Podstawiając to do lewej strony nierówności ref{mainthm} otrzymujemy defaa{sqrt{b^2 + c^2}} defbb{sqrt{c^2 + a^2}} defcc{sqrt{b^2 + a^2}} defab{sqrt{frac{a^2}{a^2 + b^2}}} defac{sqrt{frac{a^2}{a^2 + c^2}}} defbc{sqrt{frac{b^2}{b^2 + c^2}}} defba{sqrt{frac{b^2}{b^2 + a^2}}} defcb{sqrt{frac{c^2}{c^2 + b^2}}} defca{sqrt{frac{c^2}{c^2 + a^2}}} begin{align*} frac{ab}{aacdotbb} + frac{bc}{bbcdot cc} + frac{ca}{cc cdot aa} &=\ bcac + baca + cbab & leq\leqfrac{1}{2}cdotleft( {{frac{b^2}{b^2 + c^2}}}+ {{frac{a^2}{a^2 + c^2}}}+ {{frac{b^2}{b^2 + a^2}}}+ {{frac{c^2}{c^2 + a^2}}}+ {{frac{c^2}{c^2 + b^2}}}+ {{frac{a^2}{a^2 + b^2}}} right) &=frac{3}{2}. end{align*} emph{Uwaga: korzystaliśmy tutaj trzykrotnie z~nierówności $sqrt{XY} leq frac{X+Y}{2}$, która jest równoważna, po zwinięciu, $(sqrt{X} - sqrt{Y})^2 geq 0$.} end{sol} begin{problem} Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych $A$ i~$C$ przecinają się w~punkcie $P$, a~proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych $B$ i~$D$ przecinają się w~punkcie $Q$. Dowieść, że jeśli kąt $PAQ$ jest prosty, to również kąt $PCQ$ jest prosty. end{problem} begin{sol} includegraphics{11_2rozw} begin{lem} Ustalmy proste $k$ i~$l$ przecinające się w~$X$. Wtedy zbiór punktów równoodległych od tych prostych jest sumą dwusiecznych kątów utworzonych przez proste $k$ i~$l$. end{lem} begin{proof} Weźmy dowolny punkt $Y$ nie leżący na żadnej z~prostych, niech $Y_1, Y_2$ oznaczają jego rzuty na proste $k$ i~$l$. Trójkąty $XYY_1, XYY_2$ są prostokątne. Zauważmy, że jeżeli $|Y_1Y| = |Y_2Y|$ to z~tw. Pitagorasa $|XY_1| = |XY_2|$, więc $XYY_1, XYY_2$ są przystające emph{(bbb)}, stąd $angle YXY_1 = angle YXY_2$. Podobnie, jeżeli $ angle YXY_1 = angle YXY_2$ to trójkąty te są przystające emph{(podobieństwo kkk i~wspólny bok $XY$)}, więc $|XY_1| = |XY_2|$. Wobec tego punkt $X$ leży w~równych odległościach od $k, l$ wtedy i~tylko wtedy, gdy leży na dwusiecznej odpowiedniego kąta. end{proof} Skoro $ angle PAQ = 90 = frac{1}{2}cdot 180^circ$ to $ angle QAB = frac{1}{2}cdot left( 180^circ - angle BAD right)$, więc $Q$ leży na dwusiecznej kąta underline{zewnętrznego} $BAD$. Oznaczmy przez $d(X, k)$ odległość punktu $X$ od prostej $k$. begin{enumerate} item Skoro $Q$ leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $angle ABC$, to $d(Q, AB) = d(Q, BC)$. item Skoro $Q$ leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego $ angle BAD$, to $d(Q, AB) = d(Q, AD)$. item Skoro $Q$ leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $ angle ADC$ to $d(Q, AD) = d(Q, DC)$. end{enumerate} Łącznie [ d(Q, BC) = d(Q, AB) = d(Q, AD) = d(Q, DC). ] Z~lematu wynika teraz, że $Q$ leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $BCD$ lub zewnętrznego $BCD$. Gdy leży on na dwusiecznej kąta zewnętrznego to $ angle QCP = frac{1}{2}cdot left( angle BCD + 180^circ - angle BCD right) = 90^circ$. Załóżmy zatem, że $Q$ leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $BCD$, leży on również na dwusiecznych kątów wewnętrznych $B$ i~$D$. Analiza (emph{tutaj byłby rysunek, spróbuj sprawdzić na rysunku powyżej}) możliwych punktów przecięcia tych trzech prostych pokazuje, że $Q$ musi leżeć wewnątrz czworokąta $ABCD$.emph{ Ale leży on na dwusiecznej kąta zewnętrznego $A$, a~ona nie przecina czworokąta $ABCD$ poza punktem $A$. Gdyby $Q = A$ to znaczyłoby, że dwusieczna kąta $ABC$ przechodzi przez $A$, czyli kąt ten jest zerowy.} To pokazuje sprzeczność, wobec tego $Q$ nie może leżeć na dwusiecznej kąta wewnętrznego $BCD$. end{sol} begin{problem} Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od $2012^{2012}$, której nie można przedstawić w~postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie $x, y$ i~$z$ są dodatnimi liczbami całkowitymi. end{problem} begin{sol} Pokażemy, że taka liczba istnieje. emph{Przedstawieniem} liczby $S$ nazywamy zapis w~postaci $S = X^2 + Y^3 + Z^6$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich $X, Y, Z$. Rozważmy liczbę $N$ będącą szóstą potęgą liczby $K$ i~zastanówmy się, jakie muszą być emph{z~grubsza} $x, y, z$, żeby $x^2 + y^3 + z^6$ było liczbą z~przedziału $[1, N]$. Skoro liczby są dodatnie, to musi zachodzi $1leq xleq sqrt{N}, 1leq yleq sqrt[3]{N}$ oraz $1leq zleq sqrt[6]{N}$. Zauważmy dodatkowo, że jeżeli $x = sqrt{N}$, to $x^2 = N$, więc $y^3 + z^6 leq 0$, co zajść nie może. Wobec tego $x 2012^{2012}$}), to $N^{1/2} > 2012^{2012} + 1$. Gdyby wszystkie liczby większe od $2012^{2012}$ miały żądane przedstawienie, to w~przedziale $[1, N]$ co najwyżej $N - 2012^{2012}$ liczb nie miałoby przedstawienia. Ale nie ma go co najmniej $N - N^{1/2} > N - 2012^{2012}$. Sprzeczność. end{sol} end{document}