** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: jednokladnosc.tex % Created: Wed Dec 19 11:00 AM 2012 C % Last Change: Wed Dec 19 11:00 AM 2012 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=24cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{3cm} includegraphics[origin=c,width=3cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{8cm} defheadpicture{feuerbach-letni} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{19 grudnia 2012} begin{document} section{Jednokładność\large Radosnych Świąt!} emph{Poniższe kółko w~znacznej mierze jest wzięte z~poprzedniego kółka o~jednokładności, rozwiązania do większości zadań można znaleźć na {normalfonturl{http://matma.ilo.pl/images/jedn260109r.pdf}}} begin{defn} Jednokładnością o skali k ($kneq 0$) względem punktu O (który nazywamy środkiem jednokładności) nazywamy przekształcenie płaszczyzny (lub przestrzeni) które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A', taki, że: begin{enumerate} item punkty A,O,A' są współliniowe, item $|OA'|=|k|cdot |OA|$, item jeżeli $k 0$, to po tej samej. end{enumerate} end{defn} Jednokładnością o~skali -1 jest po prostu symetria względem O. Jeżeli ktoś lubi wektory, to może przeformułować definicję w~języku wektorów~--- z~grubsza jest to mnożenie przez k wektora pomiędzy punktem a~O. paragraph{Własności jednokładności} begin{enumerate} item Jednokładność przenosi proste na proste i~zachowuje kąty pomiędzy prostymi, w~szczególności przenosi proste równoległe na równoległe, itemlabel{odc} Jednokładność przenosi odcinek na odcinek $|k|$ razy dłuższy, więc zachowuje stosunki odcinków, defB{mathcal{B}} defA{mathcal{A}} item Z~ref{odc} wynika, że jednokładność przenosi okręgi na okręgi. item Z~poprzednich punktów wynika też, że jeżeli jednokładność przenosi trójkąt $mathcal{A}$ na B, to przenosi środek okręgu A na środek okręgu B, ortocentrum A na ortocentrum B itd. Z~grubsza zachowuje całą sytuację geometryczną. item Jednokładność czasem pozwala udowodnić przedziwne rzeczy w~sposób prosty. Warto o~niej pamiętać np. jeżeli mamy dwa okręgi styczne. end{enumerate} subsection*{Zadania bez jednokładności.} begin{problem} Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$ utworzonego przez środki boków $ triangle ABC$. end{problem} begin{problem} Pokaż, że środki ciężkości trójkąta ABC i~trójkąta utworzonego przez środki boków $ triangle ABC$ pokrywają się. end{problem} subsection*{Zadania negbez~jednokładności.} begin{problem} Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Dowiedź, że begin{enumerate} item środki boków $ABCD$ tworzą równoległobok. item środki ciężkości trójkątów $ triangle ABC, triangle BCD, triangle CDA, triangle DAB$ tworzą równoległobok. end{enumerate} end{problem} begin{problem} Okrąg wpisany w $triangle ABC$ jest styczny do AB w punkcie E, a~odcinek EF jest średnicą tego okręgu. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC jest styczny do tego boku w G. Wykaż, że punkty C,F,G są współliniowe. end{problem} begin{problem} Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie P (O_2 ma mniejszy promień od O_1). Cięciwa AB okręgu O_1 jest styczna do okręgu O_2 w M. Uzasadnij, że PM jest dwusieczną kąta $angle APB$. end{problem} begin{problem}[prosta Eulera] Wykaż, że w~trójkącie ABC środek ciężkości M, ortocentrum H i środek okręgu opisanego O leżą na jednej prostej. Przy założeniu, że $ triangle ABC$ nie jest równoboczny udowodnij, że $Hneq M$ i~znajdź stosunek OM/HM. end{problem} begin{problem}[okrąg Feuerbacha, dziewięciu punktów] Niech H i~O oznaczają ortocentrum i~środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że istnieje okrąg przechodzący przez środki boków $ triangle ABC$, spodki wysokości w~trójkącie ABC i~środki odcinków łączących wierzchołki z~H. emph{Okrąg ten nazywa się okręgiem Feuerbacha.} end{problem} begin{problem} Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA i~FAB tworzą sześciokąt, w~którym przeciwległe boki są równoległe i równe. end{problem} vspace{1cm} includegraphics{feuerbach-letni} end{document}