** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: starsi.tex % Created: Tue Apr 23 11:00 AM 2013 C % Last Change: Tue Apr 23 11:00 AM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=25cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{12cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{23 kwietnia 2013} begin{document} section{Ciągi jednomonotoniczne} vspace{1em} Bardzo dobrym podręcznikiem, uczącym m.in. o~ciągach jednomonotonicznych jest książka L.~Kurlandczyka

``Wędrówki po krainie nierówności''. defmono#1#2{leftlceilbegin{matrix}#1\#2end{matrix}rightrfloor} Jeżeli mamy ciągi liczb rzeczywistych $a_1,dots,a_n, b_1,dots, b_n$ to [mono{a_1&a_2&dots&a_n}{b_1&b_2&dots&b_n} := a_1b_1 + a_2b_2 + dots + a_nb_n.] jest fajnym zapisem czegoś oczywistego. Przykładowo $5 = mono{2& 1}{2& 1} > mono{1& 2}{2& 1} = 4$. To jest ogólniejszy fenomen: begin{thm} Weźmy ciągi niemalejące $a_1 leq a_2 leq dots leq a_n$ oraz $b_1 leq b_2leq dots leq b_n$. Jeżeli $b_1',dots, b_n'$ jest permutacją ciągu $b_1,dots, b_n$, to [mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b_n & b_{n-1} & dots & b_1}leq mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b'_1 & b'_2 & dots & b'_n}leq mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b_1 & b_2 & dots & b_n}.] Innymi słowy: największą wartość osiągamy układając ciągi zgodnie, najmniejszą~--- przeciwnie. end{thm} begin{proof}[Wskazówka do dowodu] Chcemy wybrać i~``posortować'' permutację $b_1',dots,b_n'$. Wystarczy pokazać, że jeżeli $a_i leq a_j$ oraz $b_i geq b_j$, to $a_ib_i + a_jb_j leq a_ib_j + a_jb_i$. end{proof} begin{cor} Ustalmy ciągi $a_1,dots,a_n$ i~$b_1,dots,b_n$ takie, że z~nierówności $a_i > a_j$ wynika $b_i geq b_j$. Jeżeli $b_1',dots, b_n'$ jest permutacją ciągu $b_1,dots, b_n$, to [mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b_n & b_{n-1} & dots & b_1}leq mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b'_1 & b'_2 & dots & b'_n}leq mono{a_1&a_2&dots & a_n}{b_1 & b_2 & dots & b_n}.] end{cor} begin{proof} Zaiste, zamieńmy indeksy tak, by ciąg $a_1,dots,a_n$ był uporządkowany niemalejąco. Na mocy założeń $b_1,dots,b_n$ też jest uporządkowany niemalejąco!! Teraz możemy zastosować poprzednie stwierdzenie. end{proof} Warto podkreślić, że, w~przeciwieństwie do średnich, ciągi nie potrzebują założenia, że liczby są dodatnie. subsection*{Zadanka} begin{problem} Uzasadnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność [frac{a^3}{b} + frac{b^3}{a} geq a^2 + b^2.] emph{Czy i~dlaczego warunek dodatniości liczb a, b jest potrzebny?} end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi [2a^2b^2 leq a^3b + b^3a leq a^4 + b^4.] end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi [a^2b + b^2c + c^2d + d^2a leq a^3 + b^3 + c^3 + d^3.] end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że jeżeli $a_1leq a_2leq dots leq a_n$ oraz $b_1leq b_2leq dots leq b_n$, to [ncdot(a_1b_1+a_2b_2 + dots + a_nb_n) geq (a_1 + a_2 + dots + a_n)cdot (b_1 + b_2 + dots + b_n).] Użyj tej nierówności, by udowodnić nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i~kwadratową, ale uważaj na założenia. end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że jeżeli a, b, c są dowolnymi liczbami dodatnimi, to [frac{a}{b+c} + frac{b}{c+a} + frac{c}{a+b} geq frac{3}{2}.] end{problem} begin{problem} Niech w~trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości a, b, c odpowiednio. Uzasadnij, że [left(a + b + c right)left(h_a + h_b + h_c right)geq 18P_{ABC}.] end{problem} begin{problem} Udowodnij, że dla liczb dodatnich a,b,c zachodzi nierówność [frac{asqrt{a}}{b+c}+frac{bsqrt{b}}{a+c}+frac{csqrt{c}}{a+b} geq frac{asqrt{a}}{a+b}+frac{bsqrt{b}}{b+c}+frac{csqrt{c}}{c+a}.] end{problem} begin{problem} Udowodnij, że dla liczb dodatnich a,b,c zachodzi nierówność [frac{asqrt{a}}{b+c}+frac{bsqrt{b}}{a+c}+frac{csqrt{c}}{a+b} geq frac{asqrt{b}}{a+b}+frac{bsqrt{c}}{b+c}+frac{csqrt{a}}{c+a}.] end{problem} end{document}