** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadanka.tex % Created: Tue Feb 26 09:00 AM 2013 C % Last Change: Tue Feb 26 09:00 AM 2013 C documentclass[10pt, a4paper]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} usepackage[textwidth=16cm, textheight=25.5cm]{geometry} usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{graphicx} usepackage{enumitem} setenumerate{itemsep=2pt,topsep=2pt,parsep=0pt,partopsep=0pt} usepackage[cmyk,usenames,dvipsnames]{xcolor} definecolor{background-gray}{gray}{0.95} definecolor{border-gray}{gray}{0.65} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie} newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{example}[thm]{Przykład} newtheorem{obs}[thm]{Obserwacja} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.2mm}} renewcommand{section}[1]{ %vspace*{-1.5cm} stepcounter{section}% begin{center}% begin{minipage}{2.5cm} includegraphics[origin=c,width=2.5cm]{headpicture} end{minipage}begin{minipage}{sectionwidth} begin{center} {Huge bfseries center #1} vskip 1mm small normalfont sc author{}\ date{} end{center} end{minipage} end{center} HRule } newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } { } newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{{bfseries Zadanie theproblem{}} #1}}\} { } pagestyle{empty} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} defsectionwidth{8cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{26 lutego 2013} newcommand{infobox}[1]{% noindent fcolorbox{border-gray}{background-gray}{#1} } begin{document} section{Algorytm Euklidesa} begin{problem} Jeżeli a jest iloczynem potęg liczb pierwszych $p_1^{a_1},dots,p_k^{a_k}$, zaś b jest iloczynem potęg tych samych liczb pierwszych $p_1^{b_1},dots,p_k^{b_k}$ to ile wynosi $NWD(a, b)$? end{problem} begin{problem} Dla jakich liczb naturalnych n ułamek [frac{3n + 4}{2n + 5}] jest liczbą całkowitą? end{problem} paragraph{Rozszerzony algorytm Euklidesa} Dla danych a, b całkowitych dodatnich chcemy użyć algorytmu Euklidesa do znalezienia liczb x, y całkowitych takich, że [xcdot a + ycdot b = NWD(a, b).] defresult#1{infobox{#1}} deffloor#1{leftlfloor #1 rightrfloor} Przeanalizujmy ciąg równości: [1 = NWD(0, 1) = NWD(2 - 2cdot 1, 1) = NWD(2, 1) = NWD(1, 2) = NWD(7 -3cdot 2, 2) = NWD(7, 2),] [1 = 1cdot result{0} + 1cdot result{1} = 1cdot left(result{2} - 2cdot result{1}right) + 1cdot result{1} = 1cdot result{2} - 1 cdot result{1} = -1cdot result{1} + 1cdot result{2} =] [-1cdot left(result{7} - 3cdot result{2} right) + 1cdot result{2} = -1cdot result{7} + 4cdot result{2}.] Poniżej podajemy pseudokod uogólnionego algorytmu: begin{enumerate} item Załóżmy $aneq 0$. Niech x', y' będą wartościami zwróconymi przez $NWD(b, amod b)$. Znaczy to, że [x'cdot b + y'cdot (amod b) = NWD(a, b).] Podstawiamy $amod b = a - kcdot b$, czyli [y'cdot a + (x' - y'k)cdot b = x'cdot b + y'cdot (a - kcdot b) = NWD(a, b),] więc zwracamy $y', x' - y'k$. Możemy przy tym zauważyć, że $k=floor{a/b}$. item Załóżmy $a = 0$. Wtedy zwracamy $1, 1$, bo $1cdot 0 + 1cdot b = b = NWD(a, b)$. end{enumerate} begin{problem} Niech a, b, d będą całkowite. Równanie $xcdot a + ycdot b = d$ ma rozwiązanie w~liczbach całkowitych x, y wtedy i~tylko wtedy, gdy $NWD(a, b)big|d$. end{problem} begin{problem}[Chińskie twierdzenie o~resztach] Załóżmy, że liczby całkowite dodatnie a, b są względnie pierwsze. Dla dowolnych reszt $r_1mod a, r_2 mod b$ istnieje liczba całkowita M taka, że [M equiv r_1 mod aquadmbox{oraz}quad Mequiv r_2 mod b.] emph{Wskazówka: rozważ najpierw reszty $(1, 0)$ i~$(0, 1)$.} end{problem} begin{problem}[Konstruowanie odwrotności $mod n$] Dana są liczby względnie pierwsze a, n. Pokaż, jak przy pomocy algorytmu Euklidesa znaleźć liczbę b taką, że $acdot b equiv 1 mod n$. Zastosuj opisaną procedurę do znalezienia liczby b takiej, że $8b equiv 1 mod 61$. Spróbuj również znaleźć liczbę b taką, że $8b equiv 1 mod 41$. end{problem} begin{problem} Dla których x całkowitych liczba $x^3 + 3cdot x^2 + 3cdot x$ jest podzielna przez $x^2 + 2x + 1$? end{problem} begin{problem} Wyznaczyć wszystkie liczby $ain mathbb{R}$, dla których wielomiany $f(x)=x^5 +ax^3+x^2+1$ i~${g(x)=x^4+ax^2+x+1}$ mają wspólny pierwiastek. end{problem} end{document}