Wpisany przez Joachim Jelisiejew
poniedziałek, 06 lutego 2012 21:47 -

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: starsi.tex % Created: Sun Feb 05 08:00 PM 2012 C % Last Change: Sun Feb 05 08:00 PM 2012 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{example}[thm]{Przykład} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty} defsectionwidth{10cm} %include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{6 lutego 2012} begin{document} section{Large Dlaczego reszty $mod p$ są fajne?\Krótkie przypomnienie teorii liczb} subsection{Ogólnorozwojowa teoria} Oznaczmy przez $mathbb{Z}_n$ zbiór reszt $mod n$, który można uznawać za ${0, 1, 2, dots, n-1}$. Porównanie $mathbb{Q}$ i~$mathbb{Z}_p$, gdzie jest p pierwsza. Poniżej $x, y in mathbb{Q}, a, bin mathbb{Z}$. begin{tabular}[]{| p{7cm} | p{7cm} |} hline $mathbb{Q}$ & $mathbb{Z}_p$\ hline &\ jeżeli $xcdot y = 0$, to $x = 0$ lub $y = 0$ & jeżeli $acdot bequiv 0 mod p$ to $a equiv 0mod p$ lub $b equiv 0 mod p$\ &\ jeżeli $xneq 0$, to istnieje $x^{-1}in mathbb{Q}$ takie, że $xcdot x^{-1} =1$ & jeżeli $a notequiv 0mod p$, to istnieje $bin mathbb{Z}$ takie, że $acdot b equiv1 mod p$. Możemy to b oznaczać ``$a^{-1} mod p$''\ &\ $x^{-1} + y^{-1} = (x + y)cdot (xy)^{-1}$ i~ogólnie wszystkie działania zachowują się tak, jak wiemy & $a^{-1} + b^{-1} equiv (a+b)cdot (ab)^{-1} mod p$ i~ogólnie wszystko jest dobrze, tylko trzeba pamiętać, że nie istnieje nic takiego jak $p^{-1} mod p$ albo $(2p)^{-1} mod p$. \ hline end{tabular} begin{center}Dlaczego ten punkt widzenia opłaca się?end{center} begin{example} Udowodnij, że jeżeli p jest pierwsza, a~$ain mathbb{Z}$ niepodzielna przez p, to ${acdot 0, acdot 1, dots, acdot (p-1)}$ dają różne reszty z~dzielenia przez p. end{example} begin{sol} begin{minipage}[]{7.5cm} Wiemy, że $anotequiv 0 mod p$. Rozważamy liczby ${acdot 0, acdot 1, dots, acdot (p-1)}$. Chcemy pokazać, że one dają różne reszty $mod p$. Więc mnożymy je wszystkie przez $a^{-1}mod p$. Otrzymujemy liczby ${0, 1, 2,dots, p-1}$ które dają różne reszty. A~więc i~oryginalne liczby dawały różne reszty. end{minipage}begin{minipage}[]{0.5cm} $ $ end{minipage} begin{minipage}[]{7.5cm} emph{To jest TYLKO intuicyjne porównanie!!} Wiemy, że $aneq 0$. Rozważamy liczby ${acdot 0, acdot 1, dots, acdot (p-1)}$. Chcemy pokazać, że są one parami różne. Więc mnożymy je wszystkie przez a^{-1}. Otrzymujemy liczby ${0, 1,2,dots, p-1}$ które są różne. A~więc i~oryginalne liczby były różne. end{minipage} end{sol} begin{problem} Jeżeli $p>3$ jest liczbą pierwszą to $pbig| 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$. emph{DLACZEGO jest potrzebne założenie $p > 3$?} end{problem} begin{problem} Jeżeli $p > 5$ jest pierwsze, to $pbig|2^{p-2} + 5^{p-2} - 7cdot 10^{p-2}$. end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że jeśli $p > 2$ jest pierwsze, to $pbig|2^{p-2} + (p-2)^{p-2}$. Uzasadnij, że jeśli $p > 40$ jest pierwsze, to $pbig|2^{p-40} + (p-2)^{p-40}$. end{problem} subsection{Praktyka~--- nieskończone schodzenie lub minimalne rozwiązanie.} begin{problem} Znajdź wszystkie rozwiązania równania $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$ w liczbach całkowitych nieujemnych.end{problem} begin{problem} Znajdź wszystkie rozwiązania równania $x^2+y^2+z^2+u^2=2xyzu$ w liczbach $mathbb{N}_+$.end{problem} begin{problem} Udowodnij, że 7 nie da się przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów liczb wymiernych dodatnich.end{problem} begin{problem} Udowodnij, że liczba postaci $4^n(8k-1)$, gdzie $k,ninmathbb{N}_+$ nie może być przedstawiona jako suma 1, 2 lub 3 kwadratów liczb naturalnych dodatnich.end{problem} begin{problem} Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $x_1,cdots,x_{2011}, y_1,cdots,y_{2011}$ iloczyn [(2x_1^2 + 3y_{1}^2)cdot (2x_2^2 + 3y_{2}^2)cdot cdots cdot (2x_{2011}^2 + 3y_{2011}^2)] nie jest kwadratem liczby całkowitej. end{problem} begin{problem} Ciąg $a_1,...,a_n$ ($a_iinmathbb{N}_+$) zamieniamy na ciąg postaci [frac{a_1+a_2}{2},frac{a_2+a_3}{2},cdots,frac{a_{n-1}+a_n}{2},frac{a_n+a_1}{2},] ten ciąg zmieniamy analogicznie itd. Udowodnij, że po pewnej liczbie takich operacji albo otrzymany ciąg będzie stały, albo będzie on zawierać wyrazy niecałkowite.end{problem} end{document}