



[](#)
[Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
% File: zad.tex % Created: Tue Dec 20 10:00 AM 2011 C % Last Change: Tue Dec 20
10:00 AM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath}
usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 26cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt
headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol}
% ----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small %
THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]
newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{}
newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar}
newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip
3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert}
renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}}
renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{\ldots}
subimport{.}/{style.sty} defsectionwidth{11cm} %include{style}
defheadpicture{bezwzgledna.jpg} defauthor{Zadania głównie z~kółka V LO w~Krakowie;
dziękuję!} defdate{20 grudnia 2011} begin{document} setlength{topmargin}{-0.5in}
section{Walcz z~układem! (równań)} paragraph{Teoria} begin{enumerate} item Układ
równań to po prostu ``równanie funkcyjne" spełnione dla konkretnych liczb. textbf{Nie
możemy podstawić dowolnych liczb}, ale textbf{możemy i~musimy przekształcać:
mnożyć równania przez coś, dodawać i~odejmować je od siebie itp.} Zwykle układy mają
pewną symetrię, która pozwala rozwiązać je sensownie. Jak przy funkcyjnych~---
bardzo pomaga wcześniejsze zgadnięcie chociaż jednego rozwiązania. item Układ
może być emph{cykliczny} tzn. nie zmieniać się przy przesunięciu cyklicznym zmiennych;
```

Rozwalamy układy liniowe

Wpisany przez Joachim Jelisiejew

wtorek, 20 grudnia 2011 19:10 - Poprawiony piątek, 06 stycznia 2012 16:56

wtedy można założyć, że któraś ze zmiennych jest największa/najmniejsza lub największą/najmniejszą wartość bezwzględną. Układ może być symetryczny np.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$$

wtedy, jeżeli chcemy pałować, warto podzielić przez jedną ze zmiennych i zmienić zmienne na ilorazy (poniżej $\alpha = x/z$, $\beta = y/z$).

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + 1 = 2(\alpha\beta + \beta + \alpha) \\ \alpha^3 + \beta^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

tutaj widać, że nie opłaca się pałować. Trzeba uważać na dzielenie przez 0! Bardzo często trzeba dużo liczyć i to dokładnie --- jeżeli jest 8 przypadków do rozważenia, to trzeba rozważyć je jeden po drugim i to szybko (choć zawsze można chwilę pomyśleć czy nie da się prościej. Ale chwilę!).

W całości rozwiązuje się metodami teorii liczb!

Problem 1 Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z , takie, że

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 2 \\ y^2 + z^2 + x = 2 \\ z^2 + x^2 + y = 2 \end{cases}$$

Problem 2 Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych a, b, c :

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3bc^2 + 3ba^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

Problem 3 Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 - (y+z+yz)x + (y+z)yz = 0 \\ y^2 - (z+x+xz)y + (x+z)xz = 0 \\ z^2 - (x+y+xy)z + (x+y)xy = 0 \end{cases}$$

Źródło: OM.

Podrozdział "Pólniezmienniki" Częste, choć na razie nie na II etapie OM, są układy postaci $y = f(x)$, $z = f(y)$, $x = f(z)$, gdzie f jest pewną funkcją. Zwykle podstawianie niewiele tu daje. Trzeba zgadnąć rozwiązania i pokazać pewną własność f , która sprawia, że innych nie ma. Tutaj zwykle b. ważne są nierówności i wartość bezwzględna.

Problem 4 Znajdź wszystkie czwórki liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d spełniające układ równań

$$\begin{cases} a = 2b^2 - 1 \\ b = 2c^2 - 1 \\ c = 2d^2 - 1 \\ d = 2a^2 - 1 \end{cases}$$

Wskazówka: Połóż $f(x) = 2x^2 - 1$. Narysuj wykres! Porównaj $|f(x)|$ i $|x|$ w zależności od x .

Problem 5 Liczby x_1, \dots, x_{2011} są rzeczywiste dodatnie i spełniają układ równań

$$\begin{cases} x_1^{x_2} = x_3 \\ x_2^{x_3} = x_4 \\ \dots \\ x_{2011}^{x_1} = x_2 \end{cases}$$

Wyznacz te liczby.