** **
Zadania PDF.

### Źródło zadań w texu.

% File: starsi.tex % Created: Sun Nov 13 02:00 PM 2011 C % Last Change: Sun Nov 13 02:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % ------------------------------------------------------------ vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ------------------------------------------------------- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty} defsectionwidth{8cm} %include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{Joachim Jelisiejew} defdate{15 listopada 2011} begin{document} section{Prosta pomocnicza} emph{To kółko korzysta m.in. z~referatu dra Osękowskiego na konferencji SEM w~Sulejowie w~2008r. oraz z~ogólnodostępnej książki Hoojoo Lee ``Topics in inequalities''.} subsection{Teoria} vskip 2mm W~tym tygodniu $f: mathbb{R} to mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną. Przypomnijmy, że prosta styczna do wykresu $f$ w~punkcie $x_0$ ma równanie begin{equation} L_{x_0}(x) = f(x_0) + (x-x_0)cdot f'(x_0). end{equation} Warto wspomnieć następujący begin{lem} begin{enumerate} item Jeżeli na pewnym przedziale $(a, b)$ funkcja $f'$ jest rosnąca (malejąca) to mówimy, że $f$ jest wypukła (wklęsła) na $(a, b)$. item Jeżeli $f''$ istnieje i~jest dodatnia (ujemna) na $(a, b)$ to $f$ jest wypukła (wklęsła) na $(a, b)$. item Jeżeli funkcja $f$ jest wypukła (wklęsła) na $(a,b)$, to wykres $L$ leży pod (ponad) wykresem $f$. end{enumerate} end{lem} Funkcja $f$ może być skomplikowana, w~nierównościach będziemy starali się zastąpić ją prostszą (bo liniową) funkcją $L_{x_0}$. Kluczowe jest tutaj odpowiednie dobranie punktu $x_0$. Powinno ono być takie, żeby w~wyjściowej nierówności po podstawieniu za zmienne $x_0$ zachodziła równość. Czasami nie da się skorzystać z~wypukłości funkcji $f$ (np. gdy jest ona funkcją wielu zmiennych), wtedy nierówność $f geq L_{x_0}$ trzeba spróbować udowodnić ręcznie. Przykładowe zadanie poniżej: setcounter{problem}{-1} begin{problem} Udowodnić, że jeśli $a_1,dots,a_n$ są dodatnie, to $frac{a_1 + dots + a_n}{n} geq frac{n}{frac{1}{a_1} + dots + frac{1}{a_n}}$ (nierówność pomiędzy arytm. a~harm.). end{problem} begin{sol} emph{Części zapisane kursywą nie muszą być częścią dowodu.} emph{Podstawowy problem jest taki, że równość zachodzi zawsze gdy $a_1 = dots = a_n$~--- nie ma jednej konkretnej wartości, dla której zachodzi. Ale} nierówność jest jednorodna względem $a_1,dots,a_n$~--- możemy przyjąć dodatkowy warunek [a_1 + dots + a_n = nhbox{ i udowadniać, że } 1 geq frac{n}{frac{1}{a_1} + dots + frac{1}{a_n}},hbox{ równoważnie } frac{1}{a_1} + dots + frac{1}{a_n} geq n.] emph{Mamy teraz (zgadujemy) dokładnie jeden punkt, w~którym zachodzi równość $a_1 = dots = a_n = 1$}. Zauważmy, że $f(x) = frac{1}{x}$ jest funkcją wypukłą na $(0, infty)$ oraz $L_1(x) = 1 + (x-1)(-1) = 2 - x$. Z~wypukłości $f$ wynika, że $L_1(x) leq f(x)$ dla każdego $x geq 0$ emph{można to też policzyć bezpośrednio}. Tak więc [ frac{1}{a_1} + dots + frac{1}{a_n} geq (2 - a_1) + dots + (2 - a_n) = 2n - (a_1 + dots + a_n) = 2n - n = n. ] co było do udowodnienia. emph{Gdybyśmy wybrali zły punkt, np. $1/2$, otrzymalibyśmy nierówność $frac{1}{a_1} geq L_{1/2}(x) = 2 + (x - 1/2)cdot (-4) = 4 - 4x$, a~po zsumowaniu $frac{1}{a_1} + dots + frac{1}{a_n} geq 4n - 4(a_1 +dots + a_n) = 4n - 4n = 0$, co nie jest fajne.} end{sol} subsection{Zadania} begin{problem} Niech $a,b$ będą liczbami dodatnimi, takimi, że $a+b = 1$. Udowodnić, że [frac{a^2}{a+1} + frac{b^2}{b+1} geq frac{1}{3}.] end{problem} begin{problem} Udowodnij, że jeśli $a, b, c > 0$, to [ frac{4a^2}{b+c} + frac{4b^2}{a+c} + frac{4c^2}{a+b} geq 2(a+b+c). ] emph{Wskazówka: jak w~przykładzie dodaj warunek $a+b+c=dots$} end{problem} begin{problem} Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a,b,c$ zachodzi nierówność Nesbitta [frac{a}{b+c} + frac{b}{a+c} + frac{c}{a+b} geq frac{3}{2}.] emph{Wskazówka: jak w~przykładzie dodaj warunek $a+b+c=dots$} end{problem} end{document}