** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadania_rozne.tex % Created: Tue Feb 07 09:00 PM 2012 C % Last Change: Tue Feb 07 09:00 PM 2012 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 26cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{./}{style.sty} %include{style} defheadpicture{./zadanie2.pdf} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{8 lutego 2012} defsource#1{emph{Źródło: #1}} begin{document} setlength{topmargin}{-0.5in} section{large Mikrokosmos w~kropli wody (czyli w~jednym rysunku)} subsection{Ostatki} begin{problem} emph{Seba, Ty wredoto, siedziałem nad tym trzy godziny!} Niech $ triangle ABC$ będzie trójkątem. begin{enumerate} item Niech M będzie środkiem BC, niech okrąg wpisany w~$ triangle ABC$ będzie styczny do BC w~D, a~okrąg dopisany do boku BC trójkąta $ triangle ABC$ będzie styczny do BC w D'. Uzasadnij, że punkty D, D' są symetryczne względem M. item W~dalszej części zadania zakładamy, że $CD = AB$. Niech F będzie punktem styczności okręgu wpisanego w~$ triangle ABC$ to AB. Wykaż, że $AD'parallel DF$. Pokaż też, że $BF' parallel EF$, gdzie F' jest punktem styczności okręgu dopisanego do boku AC trójkąta ABC z~AC. item Uzasadnij, że $Kin AE'$ i~$Lin BF'$, gdzie K, L są symetryczne do odpowiednio D, E względem I. item Uzasadnij, że proste AK i~BL przecinają się w~punkcie X symetrycznym do F względem I. item Wykaż, że $KXcdot AX = FX^2 = LXcdot BX$ i~wywnioskuj, że punkty A, K, L, B leżą na jednym okręgu. emph{A~jeszcze dzisiaj myślałem, że ten warunek nie ma sensu tutajdots} end{enumerate} emph{Całe zadanie można było zrobić też stosując metodę środka masy.} end{problem} subsection{Troszkę wzorków skróconego mnożenia} begin{problem} Uzasadnij, że $a - bbig|W(a) - W(b)$, gdzie W jest wielomianem o~współczynnikach całkowitych, $aneq b$ są liczbami całkowitymi. end{problem} begin{problem} Niech $a, bin mathbb{Z}$. Załóżmy, że~liczba pierwsza p dzieli $a + b$, a~n jest nieparzyste i~niepodzielne przez p. Uzasadnij, że potęga p dzieląca $a^n + b^n$ jest taka sama jak potęga p dzieląca $a + b$. Czy byłoby to prawdą bez założenia, że n jest nieparzyste? A~bez założenia, że jest niepodzielne przez p? end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że jeśli $p > 20$ jest pierwsza, to $13big|2^p + 11^p$, ale $13^2 notbig| 2^p + 11^p$ end{problem} begin{problem} Liczba $2^k + 1$ jest pierwsza ($kin mathbb{Z}_{geq 0}$). Uzasadnij, że $k = 2^l$, gdzie l jest całkowite. end{problem} begin{problem} Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których $$n^n + 1 hbox{ oraz } (2n)^{2n} + 1$$ są liczbami pierwszymi. source{LVI OM}end{problem} begin{problem} Niech q będzie liczbą parzystą dodatnią. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $$q^{(q+1)^n} + 1$$ dzieli się przez $(q+1)^{n+1}$ ale nie dzieli się przez $(q+1)^{n+2}$. source{XXXIII OM, via artykuł H. Pawłowskiego}end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że jeżeli funkcje $f, g:mathbb{Z}^{2011} to mathbb{Z}^{2011}$ spełniają $f(g(x)) = g(f(x))$ dla każdego x oraz $f(a - b) = f(a) - f(b), g(a - b) = g(a) - g(b)$ dla każdych $a, bin mathbb{Z}^{2011}$, to [f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) = h(f(x) - g(x))] dla każdego $xin mathbb{Z}, nin mathbb{Z}_{>0}$, gdzie $h: mathbb{Z}to mathbb{Z}$ jest pewną funkcją, a~$f^{(n)}$ oznacza n-krotne złożenie f. end{problem} begin{problem} Różne wielomiany P, Q o~współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla każdego x. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian $P^{(n)}(x) - Q^{(n)}(x)$ jest podzielny przez $P(x) - Q(x)$. emph{Uwaga: wielomian F jest podzielny przez G, jeżeli istnieje H taki, że $F(x) = G(x)cdot H(x)$ dla każdego x. Oznaczenie $P^{(n)}$ oznacza n-krotne złożenie wielomianu P.} end{problem} end{document}