IV zadanie domowe

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
wtorek, 10 stycznia 2012 21:06 - Poprawiony środa, 18 stycznia 2012 12:24

** **
Zadanir PDF.

** **
Rozwiązanie PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Tue Jan 10 08:00 PM 2012 C % Last Change: Tue Jan 10 08:00 PM 2012 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs

#1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{./}{style.sty} %include{style} defheadpicture{./images.jpeg} defauthor{kółko ILO Białystok} defdate{na 17 stycznia} begin{document} section{IV zadanie domowe} emph{Mam nadzieję, że tym razem dokładniej opisane definicje.} begin{problem} Czwórka do brydża to cztery osoby emph{z~których każda chce grać z~każdą inną z~czwórki}. Okazało się, że w~gronie 20 osób nie udało się znaleźć czwórki do brydża, wobec czego Yogi, zniechęcony, powiedział ``Na pewno za to znajdą się cztery osoby, z~których żadna nie chce grać z~żadną inną''. Udowodnij, że Yogi miał rację. end{problem} begin{sol} begin{enumerate} item Chcemy wykazać, że wśród 20 osób istnieje czwórka parami chętnych do gry lub czwórka niechętna. Ogólnie: zamiast 4 (parami chętne) i~4 (parami niechętne) możemy wziąć r i~s. Niech $R(r, s)$~--- najmniejsza liczba osób taka, że wystąpi r osób parami chętnych lub s parami niechętnych. Chcemy $R(4, 4) leq 20$. item Jakieś warunki początkowe: $R(2,s), R(s, 2)$. item Chcemy udowodnić, że $R(r, s) leq R(r-1,s) + R(r, s-1)$, stąd teza przez kolejne oszacowania. item Wybierzmy dowolną A osobę i~rozważmy liczbę d osób, ``z~którymi jest chętna''. Pokazać $d geq R(r-1, s)$ lub $r-1-d geq R(r, s-1)$. item W~pierwszym przypadku rozważyć osoby ``chętne z~A''; pokazać, że z~nich da się wybrać $r-1$ chętnych lub s niechętnych; pokazać, że łącznie da się wybrać r chętnych lub s niechętnych. item Pokazać to samo w~drugim przypadku. item {it Wartości $R(5,5)$ oraz $R(6, 6)$ nie są znane dokładnie, domniemywa się, że wartość $R(6,6)$ może nie być poznana nigdy; w~każdym razie za obliczenie którejkolwiek z~nich jest sporo zaszczytów i~spore wynagrodzenie.} end{enumerate} end{sol} end{document}

Źródło rozwiązania w texu.

% File: zad.tex % Created: Tue Jan 10 08:00 PM 2012 C % Last Change: Tue Jan 10 08:00 PM 2012 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{./}{style.sty} defsectionwidth{10cm} %include{style} defheadpicture{./images.jpeg} defauthor{kółko ILO Białystok} defdate{na 17 stycznia} begin{document} section{IV zadanie domowe.

Rozwiązanie} begin{problem} Czwórka do brydża to cztery osoby emph{z~których każda chce grać z~każdą inną z~czwórki}. Okazało się, że w~gronie 20 osób nie udało się znaleźć czwórki do brydża, wobec czego Yogi, zniechęcony, powiedział ``Na pewno za to znajdą się cztery osoby, z~których żadna nie chce grać z~żadną inną''. Udowodnij, że Yogi miał rację. end{problem} begin{sol} Osoby, które chcą ze sobą grać nazwiemy emph{połączonymi}, osoby, które nie chcą~--- emph{niepołączonymi}. Zbiór r osób parami połączonymi nazwiemy emph{r-kliką}, a~zbiór s osób parami niepołączonych nazwiemy emph{s-antykliką}. Niech $R(r, s)$ będzie najmniejszą liczbą osób taką, że w~każdym zbiorze $R(r, s)$ osób wystąpi r-klika lub s-antyklika. Chcemy udowodnić, że $R(4, 4) leq 20$. Zauważmy na początek, że $R(2, s) = s$ dla każdego $sgeq 2$. Wynika to z~dwóch obserwacji: begin{enumerate} item Jeżeli mamy $s-1$ osób, z~których żadne nie są połączone, to nie mamy 2-kliki, ani s-antykliki, więc $R(2,s) geq s$. item Jeżeli weźmiemy s osób to albo pewne dwie z~nich są połączone (więc tworzą 2-klikę) albo wszystkie osoby są niepołączone, więc tworzą s-klikę. Stąd $R(2, s) leq s$. end{enumerate} Analogicznie dowodzimy $R(s, 2) = s$ (emph{lub ogólniej $R(r, s) = R(s, r)$}). Chcemy teraz udowodnić, że $R(r, s) leq R(r-1,s) + R(r, s-1)$. Niech $R:=R(r-1,s) + R(r, s-1)$. Rozważmy dowolny zbiór R osób i~dowolną osobę $alpha$. Chcemy pokazać, że istnieje w~tym (dowolnie wybranym!) zbiorze r-klika lub s-antyklika, co z~definicji $R(r, s)$ pokaże $Rgeq R(r, s)$, czyli $R(r, s) leq R(r-1, s) + R(r, s-1)$. Załóżmy, że $alpha$ jest połączona z~d osobami. Wtedy $alpha$ jest niepołączona z~$R-1-d$ osobami. Chcemy pokazać, że $d geq R(r-1, s)$ lub $R-1-d geq R(r, s-1)$. Zaiste, gdyby żadna z~tych nierówności nie zaszła, to $d leq R(r - 1, s) - 1$ oraz $R - 1 - d leq R(r, s-1) - 1$, stąd $R - 1 = (R - 1 - d) + dleq R(r-1,s) - 1 + R(r, s-1) - 1 = R-2$, sprzeczność. defD{mathcal{D}} defND{mathcal{ND}} Rozważmy dwa przypadki begin{enumerate} item $d geq R(r-1, s)$.\ Niech D oznacza zbiór osób połączonych z~$alpha$. Skoro $|D| geq R(r-1, s)$ to w~D istnieje $r-1$-klika lub s-antyklika. Wobec tego w~$D cup left{ alpharight}$ istnieje r-klika (bo wszystkie elementy D są połączone z~$alpha$ lub s-antyklika, co dowodzi naszej tezy. item $R - 1 - d geq R(r, s-1)$.\ Niech ND oznacza zbiór osób niepołączonych z~$alpha$, wtedy w~ND istnieje r-klika lub $s-1$-antyklika, więc w~$left{ alpha right} cup ND$ istnieje r-klika lub s-antyklika. end{enumerate} Teraz oszacowujemy: begin{align*} R(3,3) leq R(3, 2) + R(2, 3) = 6quad R(4,3) leq R(4,2) + R(3,3) = 10\ R(3,4) leq R(2,4) + R(3,3) = 10quad R(4,4) leq R(4,3) + R(3, 4) = 20. end{align*} emph{Liczby $R(r, s)$ nazywają się emph{liczbami Ramseya}. Dokładna wartość $R(4,4)$ to 18.} end{sol} end{document}