** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Mon Oct 17 10:00 PM 2011 C % Last Change: Mon Oct 17 10:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 26cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 2mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defsource#1{\Źródło: #1} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty} %include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{Joachim Jelisiejew} defdate{18 października 2011} begin{document} setlength{topmargin}{-0.5in} section{Dwumian Newtona} Przypominam, że [binom{n}{k} = begin{cases}frac{ncdot (n-1)cdot dots cdot (n-k+1)}{kcdot (k-1)cdot dots cdot 1} & k > 0\ 1 & k =0.end{cases}] Definicja ma sens dla dowolnego $kin mathbb{Z}_{geq 0}, nin mathbb{R}$ (!). Jeżeli $0 leq k leq n$ oraz n, k są całkowite to $binom{n}{k} = frac{n!}{(n-k)!k!}$, pamiętajmy, że $0! = 1$. deffloor#1{leftlfloor #1 rightrfloor} begin{problem} Dla liczby rzeczywistej x definiujemy emph{podłogę z~x} jako największą liczbę całkowitą nie większą niż x, w~szczególności z~definicji wynika, że $floor{x} leq x, floor{x}in mathbb{Z}$ i~$floor{x} = x iff xin mathbb{Z}$. begin{enumerate} item Udowodnij, że $xleq y$ implikuje $floor{x} leq floor{y}$. item Udowodnij, że dla liczb naturalnych k, l zachodzi $ floor{frac{k}{l}} = frac{k}{l} iff lbig|k. $ item Uzasadnij, że $floor{x} + floor{y} leq floor{x + y}$ dla wszystkich $x,yin mathbb{R}$ (emph{wskazówka: $floor{a + b} = floor{a} + floor{b}$, o~ile $a,bin mathbb{Z}$}). item Niech p będzie liczbą pierwszą, niech $alpha$ będzie największą potęgą p, która dzieli $n!$ (n silnia). Udowodnij, że [alpha = sum_{i=1}^{infty} floor{frac{n}{p^i}}] przy czym suma po prawej jest skończona. item Oblicz, w~zależności od p, n, k, ile razy liczba pierwsza p dzieli $binom{n}{k}$. item Udowodnij, że jeżeli p jest pierwsza, a~$l geq 0$ całkowite, to $ pbig|binom{p^l}{k} $ dla każdego całkowitego $k: 0 0$ całkowite, to $pbig|binom{pk}{k}$. end{enumerate} end{problem} vskip -5mm emph{Interpretacje kombinatoryczne.} begin{problem} Udowodnij, że liczba najkrótszych dróg kratowych łączących $(0, 0)$ z~(x, y), gdzie $x,yin mathbb{N}$, wynosi $binom{x+y}{y}$. end{problem} begin{problem} Wykaż, że sposobów umieszczenia n ulotek (nierozróżnialnych) w~k skrytkach na listy jest $binom{n+k-1}{k-1}$. end{problem} begin{problem} Pokaż, że ilość nieujemnych rozwiązań całkowitych równania $x_1 + x_2 + dots + x_k = n$ w~zmiennych $x_1,dots,x_k$ to $binom{n+k-1}{k-1}$. Ile jest takich rozwiązań w~liczbach całkowitych? end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że liczba funkcji ściśle rosnących $left{ 1, 2, dots, n right} to left{ 1, 2, dots, k right}$ jest równa $binom{n}{k}$. end{problem} begin{thm}[Twierdzenie Lucasa] Niech p będzie pierwsza a~$a geq b$ całkowite. Zapiszmy a, b w~systemie pozycyjnym o~podstawie p jako [a = left(overline{a_na_{n-1}dots a_0}right)_p,quad b = left(overline{b_nb_{n-1}dots b_0}right)_p] ewentualnie uzupełniając z~przodu zerami, by długości zapisu były równe. Wtedy [binom{a}{b} equiv binom{a_n}{b_n}cdot binom{a_{n-1}}{b_{n-1}}cdot dots cdot binom{a_0}{b_0} mod p.] end{thm} end{document}