
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Sun Feb 06 10:00 PM 2011 C % Last Change: Sun Feb 06 10:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style} %include{style} begin{document} section{Ferie minęły, ale nie chodzimy do szkoły~--- dziwne.} subsection{TL} begin{enumerate} item Niech $a_1,dots,a_{2n}$ będą różnymi liczbami całkowitymi takimi, że równanie [(x - a_1)dots(x-a_{2n}) - (-1)^n (n!)^2 = 0.] ma pierwiastek całkowity r. Uzasadnij, że $r = frac{a_1 + dots + a_{2n}}{2n}$. item Liczby a,b są takie, że [a Big| b^2 Big| a^3 Big| b^4 Big| a^5 Big| b^6 Big|dots] Udowodnij, że $a = b$. item deffloor#1{leftlfloor #1 rightrfloor} Udowodnij, że ciąg liczb naturalnych $a_n = n + floor{sqrt{n} + frac{1}{2}}$ zawiera wszystkie liczby naturalne nie będące kwadratami i~tylko te ($floor{x}$ to podłoga z~liczby x). item Niech p, q -- względnie pierwsze liczby naturalne. Udowodnij, że [

floor{frac{p}{q}} + floor{frac{2p}{q}} + dots + floor{frac{(q-1)p}{q}} = frac{(p-1)(q-1)}{2}.] item Dla n naturalnego niech $F_n = 2^{2^n} + 1$. Udowodnij, że jeżeli $nneq m$ to $NWD(F_n, F_m) = 1$. item Ile jest rozwiązań równania Pitagorasa $mod p$, gdzie p jest pierwsze? Formalniej: ile jest takich trójek (a, b, c) reszt $mod p$, że $a^2 + b^2 equiv c^2 mod p$? Odpowiedź powinna zależeć wyłącznie od p. item begin{thm} Udowodnij, że aby liczba pierwsza była doskonała, potrzeba i~wystarcza, by była ona postaci $2^{s-1}(2^s - 1)$, gdzie $2^s - 1$ jest liczbą pierwszą. end{thm} begin{enumerate} item Sprawdź, że każda liczba postaci z~zadania jest doskonała. item Niech $sigma(x)$ oznacza sumę dzielników liczby x, niech n będzie liczbą doskonałą parzystą. Oblicz $sigma(n)$ w~zależności od n. Uzasadnij, że jeżeli a i~b są względnie pierwsze to $sigma(a)sigma(b) = sigma(ab)$. item Niech $n = 2^{s-1}l$, gdzie $2notBig|l$, uzasadnij, że $2^s Big|sigma(l)$ i~że $sigma(l) = q + l$. item Wywnioskuj, że l jest pierwsza i~równa $2^s - 1$ i~zakończ tym samym dowód. end{enumerate} end{enumerate} subsection{Nietrudne stereo} begin{enumerate} item Dany jest równoległościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Przekątna AC_1 przecina płaszczyznę A_1BD w~M. Udowodnić, że $AM = frac{1}{3}AC_1$. item begin{thm}[O~trzech prostopadłych] Prosta l nie jest prostopadła po płaszczyzny pi. Niech l' będzie rzutem l na pi i~niech l_1 będzie dowolną prostą zawartą w~pi. Udowodnij, że $l_1 perp l$ wtedy i~tylko wtedy, gdy $l_1 perp l'$. end{thm} item Krawędź AD czworościanu $ABCD$ jest prostopadła do ABC. Uzasadnij, że rzut na BCD ortocentrum trójkąta ABC to ortocentrum trójkąta BCD. end{enumerate} end{document}