** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: a.tex % Created: Thu Feb 10 11:00 PM 2011 C % Last Change: Thu Feb 10 11:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style} %include{style} begin{document} section{Olomiany} date{} subsection{Teoria.} Jeżeli nie powiedziano inaczej ``wielomian'' znaczy ``wielomian o~współczynnikach rzeczywistych.'' defdeg{operatorname{deg}} begin{enumerate} item begin{defn} emph{Stopniem} wielomianu $W(x)=a_0+a_1cdot x+...+a_ncdot x^n$ (gdzie a_nneq0) nazywamy n i oznaczamy to $deg W(x)=n$. Przyjmujemy, że stopień wielomianu $W(x)=0$ wynosi $-infty$. Przy takich konwencjach zachodzi [deg (Ucdot V) = deg V + deg U hbox{ oraz } deg (U + V) leq max(deg U, deg V).] Mówimy, że deg emph{zadaje gradację.} end{defn} item begin{thm}[Interpolacja Lagrange'a] Niech $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}in mathbb{R}$ będą parami różne oraz niech

$y_1,...,y_{n+1}$ będą rzeczywiste. Wtedy wśród wielomianów stopnia n (o~jeden mniej niż punktów!) lub mniejszego istnieje dokładnie jeden wielomian $W(x)$ spełniający $W(x_i)=y_i$ dla $i=1,2,...,n+1$. end{thm} item begin{thm}[Bezout] Dla każdego x_0 i każdego wielomianu $W(x)$ zachodzi $W(x)=(x-x_0)P(x)+W(x_0)$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem, który jest textbf{różny dla różnych x_0}. Ponadto jeżeli $W(x)$ miało współczynniki całkowite i x_0 jest całkowite, to $P(x)$ ma współczynniki całkowite.end{thm} item Warto pamiętać, że wielomian to jednocześnie funkcja i~że obie te rzeczy wyznaczają się wzajemnie. end{enumerate} subsection{Teoria II} begin{enumerate} item begin{thm}[Zasadnicze twierdzenie algebry, w~rzeczywistych] Każdy wielomian W o~współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego. end{thm} item begin{thm}[Zasadnicze twierdzenie algebry, zespolone] Każdy wielomian W o~współczynnikach zespolonych można rozłożyć na iloczyn wielomianów liniowych o~współczynnikach zespolonych. end{thm} item begin{thm}[wzory Vi`ete'a] Niech $x_1, x_2, dots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu [W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + dots + a_1 x + a_0,; a_nneq 0] o współczynnikach zespolonych (w szczególności także rzeczywistych). Wówczas prawdziwe są wzory: [begin{cases} x_1 + x_2 + dots + x_{n-1} + x_n = tfrac{-a_{n-1}}{a_n} \ x_1 x_2 + dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + dots + x_2 x_n + dots + x_{n-1} x_n = tfrac{a_{n-2}}{a_n} \ vdots \ x_1 x_2 dots x_n = (-1)^n tfrac{a_0}{a_n} end{cases}] end{thm} Ponieważ na olimpiadzie brak liczb zespolonych, wzorów Vi`ete'a używa się, jeżeli w~zadaniu jest wprost powiedziane, że wielomian (stopnia n) ma n pierwiastków (rzeczywistych). item begin{thm}[O~wielomianach symetrycznych] Jeżeli wielomian W, być może wielu zmiennych $x_1,dots,x_n$, jest symetryczny, to jest on sumą iloczynów wielomianów $1, x_1 + x_2 + dots x_n, x_1^2 + x_2^2 + dots + x_n^2, dots, x_1^n + x_2^n + dots x_n^n$. end{thm} end{enumerate} subsection{Zadanka.} begin{enumerate} item Wyznaczyć a,b tak, aby wielomian $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ był kwadratem innego wielomianu. item Wypisz explicite tj. jawnie rozkład wielomianu $x^4 + 1$ na wielomiany drugiego stopnia, wynikający z~zasadniczego twierdzenia algebry. item Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a,b, dla których wielomiany $f(x) = x^5 + ax^3 + x^2 + 1$ i~$g(x) = x^4 + ax^2 + x + b$ mają wspólny pierwiastek (wypisać równanie na a w~zależności od b). item Wielomian P nie jest stały, a~Q, R są takie, że $Q(P(x)) = R(P(x)))$ dla wszystkich x. Uzasadnić, że $Q = R$. end{enumerate} subsection{Zadania.} begin{enumerate} item Czy twierdzenie interpolacyjne Lagrange'a pozostanie prawdziwe, jeżeli zamienimy w~``wielomian'' na ``wielomian o~współczynnikach całkowitych'' oraz założymy, że liczby x_i, y_i są całkowite? item Czy zasadnicze twierdzenie algebry pozostanie w~mocy, jeżeli zamiast ``wielomian'' wstawić w~nim ``wielomian o~współczynnikach całkowitych''? item Wielomian o~współczynnikach rzeczywistych $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + dots + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych. Oblicz jego współczynniki. item Wielomian $P(x)$ stopnia n, o współczynnikach rzeczywistych, dla dowolnej liczby $k=0,1,...,n$ spełnia równość $P(k)=frac{k}{k+1}$. Obliczyć $P(n+1)$. emph{Czy założenie, że wielomian P jest stopnia n jest potrzebne?} item Dana jest liczba naturalna $k geq 2$ oraz liczby całkowite $a_1,dots,a_n$ spełniające warunki [a_1 + a_22^i + a_33^i + dots a_nn^i = 0 hbox{ dla }i=1,2,dots,k-1.] Dowieść, że liczba $a_1 + a_22^k + dots + a_nn^k$ jest podzielna przez $k!$. end{enumerate} subsection{Wielomiany o~współczynnikach całkowitych} begin{enumerate} item Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeżeli dla co najmniej 6 różnych liczb całkowitych przyjmuje on wartość 2007, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych. item Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami złożonymi (czyli liczbami całkowitymi dodatnimi, nie będącymi pierwszymi i nie będącymi jedynką)? item Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami pierwszymi? end{enumerate} subsection{Zady} begin{enumerate} item Udowodnić, że każdy wielomian jest sumą trzecich potęg wielomianów. item Niech F,G,H będą wielomianami stopnia co najwyżej $2n+1$ o współczynnikach rzeczywistych, takimi, że begin{enumerate} item dla wszystkich $xinmathbb{R}$ jest $F(x)leq G(x)leq H(x)$, item istnieją takie parami różne $x_1,...,x_n$, że $F(x_i)=H(x_i)$ dla $i=1,2,...,n$, item istnieje takie x_0 różne od $x_1,...,x_n$, że $F(x_0)+H(x_0)=2G(x_0)$. end{enumerate} Udowodnić, że $2G(x)equiv F(x)+H(x)$. item Dane są takie niezerowe liczby całkowite a,b,c, że $ a + b + c = 0$. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest podzielność [a^2 + b^2 + c^2 Big| a^{n^2 + 1} + b^{n^2 + 1} + c^{n^2 + 1}.] item W~tym zadaniu ``wielomian'' oznacza wielomian o~współczynnikach całkowitych. Możemy zdefiniować relację $mod $ dla wielomianów przez $P equiv Q mod R$ wtedy i~tylko wtedy, gdy $R Big| P - Q$, innymi słowy [P - Qin left{ Kcdot RBig| K hbox{ -- wielomian } right}.] Relacja ta ma podobne własności jak dla liczb całkowitych. Zdefiniujmy teraz relację $P equiv Q mod (R_1, R_2)$ przez $P - Qin left{ K_1cdot R_1 + K_2 cdot R_2 Big| K_1, K_2 hbox{ -- wielomiany }right}$. Udowodnić, że wartość wielomianu P, o~współczynnikach całkowitych, jest podzielna przez liczbę pierwszą p dla każdego argumentu całkowitego wtedy i~tylko wtedy, gdy $P equiv 0 mod p, x^p - x$. end{enumerate} end{document}