** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Mon Dec 27 02:00 PM 2010 C % Last Change: Mon Dec 27 02:00 PM 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 25.5cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} usepackage{multicol} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} include{style} begin{document} renewcommand{thethm}{} setlength{topmargin}{-0.5in} section{{scriptsize Dajcie mi punkt podparcia, a~poruszę Ziemię.}\\[-1cm]Środek masy} subsection{Teoria} Wszędzie poniżej zakładamy, że jesteśmy w~płaszczyźnie lub w~przestrzeni i~że mamy dany pewien układ współrzędnych (kartezjańskich). Nie będę o~tym mówić, ale rozważania nie zależą od wyboru układu. Dla wygody oznaczeń definiujemy też operacje na punktach -- mnożenie przez liczbę rzeczywistą i~dodawanie. Niech $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ oraz $Kin mathbb{R}$. Wtedy [A + B = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)] [Kcdot A = K(a_1, a_2) := (Ka_1, Ka_2)] emph{Jeżeli ktoś woli: są to ``szkolne'' operacje mnożenia przez skalar i~dodawania wektorów. Równie dobrze można to robić w~trzech wymiarach.} Rozważamy punkty z~masami tj. pary $(A, m)$, gdzie $A$ jest punktem, a~$m$ jest liczbą rzeczywistą (niekoniecznie dodatnią!) czyli ``masą''. begin{defn} textbf{Środkiem masy} układu punktów

$(m_1, A_1), cdots, (m_n, A_n)$ jest punkt (z~masą): [left(frac{m_1cdot A_1 + cdots + m_ncdot A_n}{m_1 + cdots + m_n}, m_1 + cdots + m_nright)] o~ile $m_1 + cdots + m_n neq 0$. Jeżeli $m_1 + cdots + m_n = 0$ to mówimy, że układ textbf{nie posiada środka masy}. end{defn} begin{thm}[o~przegrupowywaniu] Załóżmy, że układ $(A_1, m_1), cdots, (A_n, m_n)$ ma środek masy $mathcal{M}$ i~układ $A_1,cdots,A_l$ ma środek masy M, wtedy układ $M, A_{l+1}, cdots, A_n$ także ma środek masy $mathcal{M}$. end{thm} emph{Intuicyjnie: chcąc obliczyć środek masy możemy zamieniać część punktów na ich środek masy, wyróżniłem akurat punkty $A_1,cdots,A_l$ tylko ze względu na prostotę oznaczeń ;)} begin{proof} Obliczam [mathcal{M} = left(frac{m_1A_1 + cdots + m_nA_n}{m_1 + cdots + m_n}, m_1 + cdots + m_nright)quad M = left(frac{m_1A_1 + cdots + m_lA_l}{m_1 + cdots + m_l}, m_1 + cdots + m_l right)] Suma mas układu $M,(A_{l+1}, m_{l+1}), cdots, (A_n, m_n)$ to $(m_1 +cdots + m_l) + m_{l+1} + cdots + m_n$, czyli jest ona niezerowa (bo to masa całego układu) więc~środek masy istnieje i~wyraża się wzorem [left(frac{(m_1 + cdots + m_l)frac{m_1A_1 + cdots + m_lA_l}{m_1 + cdots + m_l} + m_{l+1}A_{l+1} + cdots + m_nA_n}{(m_1 + cdots + m_l) + m_{l+1} + cdots + m_n}, (m_1 + cdots + m_l) + m_{l+1} + cdots + m_nright) = mathcal{M}] end{proof} subsection{Pytania i~problemy wstępne} begin{enumerate} item Gdzie leży środek masy układu złożonego z~jednego punktu? item Gdzie leży środek masy układu złożonego z~dwóch punktów? textbf{Uwaga:} to pytanie, wbrew prostocie jest textbf{kluczowe}, gdyż obliczenie środka ciężkości dowolnego układu sprowadza się do obliczania środków masy dla par punktów. item Załóżmy, że punkty A, B, C tworzą trójkąt. Czym są (jaka jest konstrukcja) punkty będące środkami ciężkości układów: begin{multicols}{2} begin{itemize} item $(A, 0), (B, 1), (C, 1)$, item $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$, item $(A, -1), (B,1), (C, 0)$, item $(A, -1), (B,1), (C, 1)$? end{itemize} end{multicols} end{enumerate} begin{thm}[współrzędne barycentryczne] Niech ABC będzie trójkątem na płaszczyźnie. Dla każdego punktu D tej płaszczyzny da się tak dobrać masy m_1, m_2, m_3, że $(D, m_1 + m_2 + m_3)$ jest środkiem ciężkości $(A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)$. Jeżeli dodatkowo nałożymy warunek, że $m_1 + m_2 + m_3$ musi być równe 1 (żeby uniknąć niejednoznaczności typu $(A,1), (B,1), (C,1)$ i~$(A,2), (B, 2), (C, 2)$), to takie masy da się dobrać na dokładnie jeden sposób. Masy m_1,m_2,m_3 nazywają się współrzędnymi barycentrycznymi D. end{thm} emph{Rozwiązywanie geometrii przy użyciu środka masy polega na dobraniu mas do istniejących punktów, tak, aby środek masy był czymś ciekawym. Działa to świetnie z~``udowodnić, że 1000 linii przecina się w~jednym punkcie'', czy że jakiś odcinek dzieli się w~danym stosunku a~o~wiele gorzej z~okręgami czy kątami.} subsection{Zadania} begin{enumerate} item Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem i niech K,L,M,N będą środkami boków AB,BC,CD,DA odpowiednio. Udowodnij, że KM i LN połowią się, więc $KLMN$ jest równoległobokiem i że środek tego równoległoboku pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki przekątnych. item begin{thm}[Cevy] Punkty X,Y,Z leżą na bokach BC,CA,AB trójkąta ABC odpowiednio. Udowodnij, że proste AX,BY,CZ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy [frac{AZ}{BZ}cdotfrac{BX}{CX}cdotfrac{CY}{AY}=1] end{thm} item Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC wybrano punkty Z, X, Y tak, że [frac{AZ}{BZ} = frac{BX}{CX} = frac{CY}{AY}.] Dowiedź, że środki ciężkości trójkątów ABC i~XYZ pokrywają się. item begin{thm}[van Aubela] Dany jest trójkąt ABC i~punkty X, Y, Z leżące na bokach odpowiednio BC, CA, AB. Proste AX, BY, CZ

przecinają się w~punkcie M. Wykazać, że [frac{AM}{MX} = frac{AY}{CY} + frac{AZ}{BZ}.] end{thm} item emph{Punkty szczególne w~trójkącie mające w~miarę strawne współrzędne barycentryczne.} Udowodnić, że jeśli w~punktach A, B, C trójkąta położymy masy m_1, m_2, m_3 to środek ciężkości pokryje się z~następującym punktem szczególnym trójkąta ABC: begin{tabular}[]{|c|c|c|} hline Punkt & masy & objaśnienie\ hline środek ciężkości & $(1, 1, 1)$ &\ środek okręgu wpisanego & (a, b, c) & długości boków\ środek okręgu dopisanego do BC & $(-a, b, c)$ &\ środek okręgu opisanego & $(sin 2alpha, sin 2beta, sin 2gamma)$ & $alpha, beta, gamma$ to kąty przy A,B,C\ hline end{tabular} item Weźmy trójkąt ABC. Załóżmy, że parami różne punkty T, U, V mają współrzędne barycentryczne $(t_1,t_2,t_3), (u_1,u_2,u_3)$, (v_1,v_2,v_3). Uzasadnić, że punkty te leżą na jednej prostej wtedy i~tylko wtedy, gdy istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste $alpha, beta, gamma$, że [alpha(t_1,t_2,t_3) + beta(u_1,u_2,u_3) + gamma(v_1, v_2, v_3) = 0.] item Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkty X, Y, Z, T leżą na bokach AB, BC, CD, DA odpowiednio, przy czym $AX/BX = DZ/CZ = 3$ oraz $BY/CY = AT/DT = 5$. Niech E będzie punktem przecięcia XZ i~YT. Ile wynosi XE/EZ, a~ile YE/TE? item Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK=DL$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Dowieść, że prosta AP jest dwusieczną kąta BAD. source{Staszic} emph{Wskazówka: warto użyć tw. o~dwusiecznej: dwusieczna $angle BAC$ dzieli bok BC w~stosunku AB/AC, żeby uniknąć kątów.} end{enumerate} end{document}