Wpisany przez Joachim Jelisiejew
czwartek, 27 stycznia 2011 17:14 -

Poniżej zadania z kółka poprowadzonego przez Łukasza dzisiaj, spisane przez Łukasza. Dzięki! Od siebie dodam, że stanowią one dobry przegląd tego, co może się pojawić na II etapie OMa.
Y.

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defVrule{smash{vrule height7pt depthbaselineskip}} defVarule{smash{vrule height7pt depth3pt}} defHrule #1{Squeezemultispan#1hrulefill} defCompressMatrices{ifmmode defquad{hskip.5emrelax}fi} defSqueeze{noalign{vskip-.5baselineskip}} defrk{operatorname {rank}} deflin{operatorname {lin}} defdim{operatorname{dim}} defker{operatorname{ker}} defdet{operatorname{det}} defim{operatorname{im}} defid{operatorname{id}} defRe{operatorname{Re}} defIm{operatorname{Im}} defi{operatorname{i}} defdist{operatorname{dist}} defdiag{operatorname{diag}} defspec{operatorname{spec}} defAbs #1{leftvert #1rightvert} defNorm #1{leftVert #1rightVert} defcc #1{overline{#1}} defip#1#2{langle #1,#2 rangle} defbf#1{textbf{#1}} defmattwo#1#2#3#4{left[begin{array}{c c}#1 & #2\ #3 & #4\end{array}right]} defmattree#1#2#3#4#5#6#7#8#9{left[begin{array}{c c c}#1 & #2 & #3\ #4 & #5 & #6\ #7 & #8 &

#9\end{array}right]} subimport{../}{style} begin{document} defrozw{\ textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} section{Kółko 26.01.2011 - Nie ma lipy! Czaskamy zadanka! } paragraph{Przed treningiem rozgrzewka musi być} begin{enumerate} item Na płaszczyźnie danych jest 6 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt. item Każdy punkt prostej pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykazać, że istnieją trzy różne punkty jednego koloru, z których jeden jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach. item Dane są liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Wykonujemy operację polegającą na dodaniu liczby 1 do pewnych dwóch spośród tych liczb. Postępowanie to kontynuujemy. Czy możemy w ten sposób otrzymać ciąg składający się z sześciu równych liczb? item Drzewo binarne to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma co najwyżej dwóch synów. Regularne drzewo binarne to drzewo, w którym każdy wierzchołek ma 0 lub 2 synów. Głębokością wierzchołka w ukorzenionym drzewie nazwiemy ilość krawędzi na ścieżce między korzeniem drzewa, a tym wierzchołkiem. Liście to wierzchołki, które nie mają synów, a pozostałe wierzchołki to węzły wewnętrzne. Niech X będzie sumą głębokości węzłów wewnętrznych, a Y sumą głębokości liści w regularnym drzewie binarnym o n wierzchołkach. Udowodnić, że $Y=X+n-1$. item Niech waga liścia x o głębokości d drzewa binarnego wyrażona wzorem $w(x)=2^{-d}$. Udowodnij, że $sum{w(x)} leq 1$, gdzie sumujemy po wszystkich liściach x. end{enumerate} paragraph{Jedziemy z koksem} begin{enumerate} item Na szachownicy $9 times 9$ ustawiono 9 wież w taki sposób, że żadne dwie nie biją się. Następnie każdą wieżę przestawiono na inne pole ruchem konika szachowego. Wykazać, że po tym przestawieniu pewne dwie wieże biją się. item W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem co najwyżej jeden mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których taka sytuacja jest możliwa. item Rozstrzygnąć, czy istnieje 777 kolejnych liczby naturalnych, wśród których znajduje się dokładnie 7 liczb pierwszych. item W przestrzeni danych jest takich n punktów ($n geq 4$), że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru. item Rozstrzygnąć, czy istnieje taki zbiór S złożony z 777 różnych liczb całkowitych dodatnich, że suma liczb dowolnego niepustego podzbioru zbioru S nie jest kwadratem liczby całkowitej. item Dana jest tablica rozmiaru $2n times 2n$, w której $3n$ pól pomalowano na czarno. Wykazać, że można tak wybrać n kolumn oraz n wierszy, by każde czarne pole znalazło się w pewnym wybranym wierszu lub w pewnej wybranej kolumnie. item Czy wierzchołki 20--kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, dots , 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była nie większa niż 42? Odpowiedź uzasadnij. item Każdą liczbę naturalną pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne $a,b>n$ takie, że liczby a,b i $a+b$ są jednego koloru. item Każdemu wierzchołkowi 100--kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij. item Na niektórych polach kwadratowej planszy o parzystych wymiarach $n times n$ stoją pionki. Co sekundę jeden z pionków przechodzi na wolne pole sąsiednie. Po pewnym czasie wszystkie pionki znalazły się na swoich wyjściowych pozycjach. Każdy pionek wykonał n^2 ruchów i odwiedził wszystkie pola planszy. Dowieść, ze był moment, w którym żaden pionek nie stał na swoim polu wyjściowym. item Dany jest ciąg n^2+1 liczb. Wykazać, że ciąg ten zawiera podciąg $n+1$--elementowy niemalejący lub podciąg $n+1$--elementowy nierosnący. item Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę. Dla każdego $n geq 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów. item Szachownicą $n times n$ wypełniono liczbami rzeczywistymi z przedziału $ip{-1}{1}$. Suma liczb w każdym kwadracie $2 times 2$ jest zerem. Udowodnić, że suma wszystkich liczb na szachownicy nie przekracza n. item Liczby $1,2,...,9$ napisano na osobnych kartkach. Gracze na przemian zabierają sobie po jednej z nich. Wygrywa ten, kto jako pierwszy skompletuje trzy kartki o sumie liczby równej 15. Gracz rozpoczynający wybrał kartkę z liczbą 2. Jaki ruch powinien wykonać drugi gracz. Czy któryś z zawodników ma strategię wygrywającą? Jeśli tak, to który? end{enumerate} end{document}