** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Wed Dec 15 06:00 PM 2010 C % Last Change: Wed Dec 15 06:00 PM 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{figure} usepackage[pdftex]{graphicx} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} defabs#1{left| #1 right|} %subimport{../}{style} include{style} begin{document} %setlength{topmargin}{-0.5in} section{Potęga punktu} subsection{Teoria} begin{minipage}{10.5cm} begin{thm}[o~siecznych, o~stycznej] Dany jest okrąg o o~środku O i~promieniu R oraz~punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i~przecina okrąg o w~(niekoniecznie różnych) punktach A i~B, to iloczyn $|PA| cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a~dokładniej [|PA| cdot |PB| = abs{|PO|^{2} - R^2}.] end{thm} end{minipage}begin{minipage}{5cm} includegraphics[origin=c]{pow_in} end{minipage} begin{defn}[potęga punktu] Przy powyższych oznaczeniach liczbę (być może ujemną!) $|PO|^{2} - R^2$ nazywamy textbf{potęgą punktu} P względem o i~oznaczamy $p(P, o)$. end{defn} begin{cor} mbox{} begin{enumerate} item $p(P, o) 0$, gdy P leży poza o. item przy oznaczeniach twierdzenia (nadal dla dowolnej prostej) mamy [begin{array}{l l} p(P, o) = -|PA|cdot |PB| & hbox{gdy }Phbox{ leży wewnątrz }o\ p(P, o) = |PA|cdot |PB| & hbox{inaczej} end{array}] item Jeżeli P leży poza okręgiem o, to $p(P, o)$ jest kwadratem długości stycznej do o przechodzącej przez~P. end{enumerate} end{cor} begin{minipage}{10.5cm} begin{thm} Ustalmy dwa niewspółśrodkowe okręgi o_1, o_2 o~środkach O_1, O_2. Zbiór punktów P takich, że $p(P, o_1) = p(P, o_2)$ jest textbf{prostą prostopadłą} do O_1O_2; nazywamy ją textbf{osią potęgową okręgów} o_1,o_2. end{thm} begin{cor} Jeżeli okręgi przecinają się, to prosta przechodzi przez punkty przecięcia. end{cor} end{minipage}begin{minipage}[]{5.5cm} includegraphics[origin=c]{eq_pow} end{minipage} begin{thm}[** Brianchona] Jeżeli w~sześciokąt $ABCDEF$ da się wpisać okrąg to przekątne AD, BE, CF mają punkt wspólny. end{thm} subsection{Zadania} begin{enumerate} item Uzasadnij, że zbiór punktów mających potęgę względem danego okręgu o równą $p > 0$ jest okręgiem. item emph{Eliminacje do PTM -- przypomnienie.} Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A,B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $angle PXY = angle PYX$. item begin{thm}[Kryterium współokręgowości] Jeżeli punkty S,A,B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o~początku w~S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i~tylko wtedy, gdy $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. end{thm} item Uzasadnij, że teza poprzedniego twierdzenia zachodzi również, gdy S leży na odcinkach AB i~CD. item Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MBcdot ME=MCcdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AEcdot AC=AFcdot AB$. item Dane są okręgi o_1, o_2 oraz punkt P. Półproste k i~l mają początek w~P i przecinają: k okrąg o_1 w~A, B, zaś l okrąg o_2 w~C, D ($Aneq B$, $Cneq D$). Udowodnić, że na A,B,C,D da się opisać okrąg wtedy i~tylko wtedy, gdy P leży na osi potęgowej o_1 i~o_2. item Okręgi o_1, o_2 przecinają się w~punktach K i~L i~są styczne wewnętrznie do okręgu o w~punktach A, B odpowiednio, przy czym promień o jest większy od promieni o_1 i~o_2. Prosta k jest styczna zewnętrznie do o_1 i~o_2 odpowiednio w~punktach C i~D. Proste AC i~BD przecinają się w~S. Wykazać, że K, L, S są współliniowe. emph{Niedługo (ale nie teraz ;) udowodnimy, że (co najmniej w~części przypadków) punkt S leży na o.} end{enumerate} subsection{Oś potęgowa} begin{enumerate} item Jeśli okręgi o_1,o_2,o_3 są takie, że $o_1cap o_2={A,B}$, $o_2cap o_3={C,D}$, $o_3cap o_1={E,F}$, to proste AB, CD, EF albo są wszystkie równoległe, albo przecinają się w jednym punkcie. item Uzasadnij, że wysokości w~trójkącie ABC przecinają się w~jednym punkcie. emph{Rozważ okręgi o~średnicach AB, BC, CA.} item * W~sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ mamy równości odcinków: $FA = AB$, $BC = CD$, $DE = EF$. Udowodnić, że wysokości trójkątów ABC, CDE, EFA, poprowadzone odpowiednio z~wierzchołków B, D, F przecinają się w~jednym punkcie. emph{Rozważ odp. okręgi.} item * Nieprostopadłe przekątne AC i~BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w~punkcie E. Wykazać, że prosta przechodząca przez ortocentra BCE i~ADE jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki odcinków AB i~CD. emph{Wsk.: udowodnić, że ortocentra leżą na osi potęgowej okręgów, których średnicami są AB i~CD.} end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: zad.tex % Created: Wed Dec 15 06:00 PM 2010 C % Last Change: Wed Dec 15 06:00 PM 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{figure} usepackage[pdftex]{graphicx} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} defabs#1{left| #1 right|} %subimport{../}{style} include{style} begin{document} %setlength{topmargin}{-0.5in} section{Potęga punktu} subsection{Teoria} begin{minipage}{10.5cm} begin{thm}[o~siecznych, o~stycznej] Dany jest okrąg o o~środku O i~promieniu R oraz~punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i~przecina okrąg o w~(niekoniecznie różnych) punktach A i~B, to iloczyn $|PA| cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a~dokładniej [|PA| cdot |PB| = abs{|PO|^{2} - R^2}.] end{thm} end{minipage}begin{minipage}{5cm} includegraphics[origin=c]{pow_in} end{minipage} begin{defn}[potęga punktu] Przy powyższych oznaczeniach liczbę (być może ujemną!) $|PO|^{2} - R^2$ nazywamy textbf{potęgą punktu} P względem o i~oznaczamy $p(P, o)$. end{defn} begin{cor} mbox{} begin{enumerate} item $p(P, o) 0$, gdy P leży poza o. item przy oznaczeniach twierdzenia (nadal dla dowolnej prostej) mamy [begin{array}{l l} p(P, o) = -|PA|cdot |PB| & hbox{gdy }Phbox{ leży wewnątrz }o\ p(P, o) = |PA|cdot |PB| &

hbox{inaczej} end{array}] item Jeżeli P leży poza okręgiem o, to $p(P, o)$ jest kwadratem długości stycznej do o przechodzącej przez~P. end{enumerate} end{cor} begin{minipage}{10.5cm} begin{thm} Ustalmy dwa niewspółśrodkowe okręgi o_1, o_2 o~środkach O_1, O_2. Zbiór punktów P takich, że $p(P, o_1) = p(P, o_2)$ jest textbf{prostą prostopadłą} do O_1O_2; nazywamy ją textbf{osią potęgową okręgów} o_1,o_2. end{thm} begin{cor} Jeżeli okręgi przecinają się, to prosta przechodzi przez punkty przecięcia. end{cor} end{minipage}begin{minipage}[]{5.5cm} includegraphics[origin=c]{eq_pow} end{minipage} begin{thm}[** Brianchona] Jeżeli w~sześciokąt $ABCDEF$ da się wpisać okrąg to przekątne AD, BE, CF mają punkt wspólny. end{thm} subsection{Zadania} begin{enumerate} item Uzasadnij, że zbiór punktów mających potęgę względem danego okręgu o równą $p > 0$ jest okręgiem. begin{sol} Niech R będzie promieniem o. Punkt P należy do tego zbioru wtedy i~tylko wtedy, gdy $p = p(P, o) = |PO|^2 - R^2$, czyli gdy $|PO| = sqrt{p + R^2}$, innymi słowy gdy P leży na okręgu o~środku O i~promieniu $sqrt{p + R^2}$. end{sol} item emph{Eliminacje do PTM -- przypomnienie.} Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A,B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $angle PXY = angle PYX$. begin{sol} Prosta AB jest osią potęgową O_1 i~O_2, skoro więc punkt P leży na niej to $p(P, O_1) = p(P, O_2)$. Z~teorii wiemy, że $p(P, O_1) = |PX|^2$, $p(P, O_2) = |PY|^2$, stąd $|PX|^2 = |PY|^2$, $|PX| = |PY|$, więc trójkąt PXY jest równoramienny, co kończy dowód. end{sol} item begin{thm}[Kryterium współokręgowości] Jeżeli punkty S,A,B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o~początku w~S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i~tylko wtedy, gdy $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. end{thm} emph{Zakładamy tutaj i~dalej, że owe dwie półproste nie tworzą prostej, a~punkty A,B i~C,D są różne.} begin{sol} ``wtedy''. Jeżeli $A, B, C, D$ leżą na jednym okręgu, to $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. ``tylko wtedy''. Załóżmy zatem, że $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. Okrąg opisany na A, B, C przecina półprostą SC w~punkcie D' (gdy jest on styczny przyjmujemy $D' = C$). Korzystając z~implikacji ``wtedy'' obliczam $|SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD|$. Łącznie $|SC|cdot |SD| = |SA|cdot |SB| = |SC| cdot |SD'|$, czyli $|SD| = |SD'|$, $D = D'$. end{sol} item Uzasadnij, że teza poprzedniego twierdzenia zachodzi również, gdy S leży na odcinkach AB i~CD. begin{sol} Identycznie jak w~poprzednim przypadku. end{sol} item Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MBcdot ME=MCcdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AEcdot AC=AFcdot AB$. begin{sol} Skoro $MBcdot ME=MCcdot MF$ to (z~powyższego kryterium) B, E, C, F leżą na jednym okręgu o, a~skoro tak to $AEcdot AC = p(A, o) = AFcdot AB$. end{sol} item Dane są okręgi o_1, o_2 oraz punkt P. Półproste k i~l mają początek w~P i przecinają: k okrąg o_1 w~A, B, zaś l okrąg o_2 w~C, D ($Aneq B$, $Cneq D$). Udowodnić, że na A,B,C,D da się opisać okrąg wtedy i~tylko wtedy, gdy P leży na osi potęgowej o_1 i~o_2. begin{sol} Oba warunki z~zadania są równoważne równości $PAcdot PB = PCcdot PD$. end{sol} item Okręgi o_1, o_2 przecinają się w~punktach K i~L i~są styczne wewnętrznie do okręgu o w~punktach A, B odpowiednio, przy czym promień o jest większy od promieni o_1 i~o_2. Prosta k jest styczna zewnętrznie do o_1

i~o_2 odpowiednio w~punktach C i~D. Proste AC i~BD przecinają się w~S. Wykazać, że K, L, S są współliniowe. begin{sol} Niech O, O_1,O_2 oznaczają środki odpowiednich okręgów. Potrzebny nam będzie fakt, że S leży na o. Niech S' będzie przecięciem BD z~o. Punkty B, O_2, O są współliniowe, więc trójkąty BO_2D i~BOS' są równoramienne o~wspólnym kącie, stąd $angle BDO_2 = angle BS'O$, zatem CD jest równoległe do stycznej do o w~punkcie S'. Analogicznie konstruując z~AC punkt S'' stwierdzamy, że styczna w~S'' jest również równoległa do CD, a~więc $S' = S''$ (punkty S' i~S'' leżą po tej samej stronie CD). begin{minipage}[]{9cm} To dowodzi, że $S' = S''$ jest punktem przecięcia AC i~BD, więc $S' = S$. Korzystając z~poprzedniego zadania, S leży na KL, czyli na osi potęgowej O_1 i~O_2 jeżeli na $ABCD$ da się opisać okrąg. Trójkąty BOS i~BO_2D są równoramienne, więc zachodzą równości [angle BAC = angle BAS = frac{1}{2}angle BOS = 90^circ - angle OBS] oraz [angle BDC = angle BDO_2 + angle O_2DC = angle BDO_2 + 90^circ] stąd [angle BDC + angle BAC = 180^circ,] czyli na $ABCD$ da się opisać okrąg, co kończy dowód. end{minipage}begin{minipage}[]{8cm} includegraphics{7.pdf} end{minipage} end{sol} end{enumerate} subsection{Oś potęgowa} begin{enumerate} item Jeśli okręgi o_1,o_2,o_3 są takie, że $o_1cap o_2={A,B}$, $o_2cap o_3={C,D}$, $o_3cap o_1={E,F}$, to proste AB, CD, EF albo są wszystkie równoległe, albo przecinają się w jednym punkcie. begin{sol} Niech S będzie punktem przecięcia AB i~CD. Skoro są to osie potęgowe to $p(S, o_1) = p(S, o_2)$ i~$p(S, o_2) = p(S, o_3)$, a~więc również $p(S, o_1) = p(S, o_3)$, czyli $Pin EF$. end{sol} item Uzasadnij, że wysokości w~trójkącie ABC przecinają się w~jednym punkcie. emph{Rozważ okręgi o~średnicach AB, BC, CA.} begin{sol} Niech o_{AB}, o_{BC}, o_{CA} oznaczają okręgi o~średnicach AB, BC, CA odpowiednio. Zauważmy, że osiami potęgowymi par okręgów są wysokości w~trójkącie. Zaiste niech k oznacza oś potęgową o_{AB} i~o_{CA}. Wtedy $Ain k$, gdyż $Ain o_{AB}cap o_{CA}$, a~ponadto $kperp M_{AB}M_{CA} || BC$, czyli k jest wysokością. emph{M_{XY} oznacza środek odcinka XY.} end{sol} item * W~sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ mamy równości odcinków: $FA = AB$, $BC = CD$, $DE = EF$. Udowodnić, że wysokości trójkątów ABC, CDE, EFA, poprowadzone odpowiednio z~wierzchołków B, D, F przecinają się w~jednym punkcie. emph{Rozważ odp. okręgi.} begin{sol} Rozważmy okręgi o_A, o_C, o_E o~środkach w~A, C, E i~promieniach AB, CD, EF odpowiednio. Analogicznie jak w~poprzednim zadaniu udowadniamy, że osiami potęgowymi okręgów są wysokości z~treści zadania. Osie te mają punkt wspólny, co kończy dowód. end{sol} item * Nieprostopadłe przekątne AC i~BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w~punkcie E. Wykazać, że prosta przechodząca przez ortocentra BCE i~ADE jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki odcinków AB i~CD. emph{Wsk.: udowodnić, że ortocentra leżą na osi potęgowej okręgów, których średnicami są AB i~CD.} begin{sol} Niech dla skrótu o_{XY} oznacza okrąg o~średnicy XY, h_X dla $Xin {E, B, C}$ oznacza wysokość w~trójkącie EBC wypuszczoną z~wierzchołka X, a~$kcap l cap n$ oznacza przecięcie prostych k, l, n. Niech H oznacza ortocentrum BCE, innymi słowy $H = h_E cap h_B cap h_C$.

Zauważmy, że h_B, h_E, h_C są osiami potęgowymi par okręgów: o_{AB} i~o_{EB}, o_{EB} i~o_{EC}, o_{EC} i~o_{CD}. Stąd $p(o_{AB}, H) = p(o_{EB}, H) = p(o_{EC}, H) = p(o_{CD}, H)$, czyli H leży na osi potęgowej o_{AB} i~o_{CD}. Analogicznie ortocentrum ADE leży na tej osi, zatem prosta przechodząca przez te (różne!) punkty jest osią potęgową o_{AB} i~o_{CD}, czyli jest prostopadła do prostej łączącej środki tych okręgów. end{sol} end{enumerate} end{document}