** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania zadań domowych PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Wed Apr 06 11:00 PM 2011 C % Last Change: Wed Apr 06 11:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} include{style} begin{document} section{Algi, \[-1.5cm]{small podgatunek: wielomiany}} begin{defn} Stopień wielomianu dwóch zmiennych definiujemy jako największą z~sum wykładników potęg przy x i~Y i~oznaczamy deg, np. $deg x^2 = 2$, $deg x^4 + x^3y^3 + y^5 = 6$.end{defn} begin{defn} Pierwiastek (rzeczywisty) wielomianu dwóch zmiennych $W(x, y)$ to taka para liczb rzeczywistych, że (x_0, y_0), że $W(x_0, y_0) = 0$. end{defn} subsection{Zadania} begin{enumerate} item Udowodnij, że jeżeli liczby $a,binmathbb{R}$ są takie, że wielomian $W(x) = ax^3 - ax^2 + 9bx - b$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste dodatnie, to są one równe. item Rozwiąż układ równań [left{begin{array}[]{c} x^5 - y^5 = 992\ x - y = 2 end{array}right.] w~liczbach rzeczywistych dodatnich x, y. item Czy wielomian dwóch zmiennych ma zawsze tylko skończenie wiele pierwiastków? Jeżeli tak, czy zawsze ma ich co najwyżej tyle, ile wynosi jego stopień? item Niech X będzie zbiorem pierwiastków wielomianu dwóch zmiennych W. Udowodnij, że dowolna prosta k przecina x tylko w~skończenie wielu punktach lub cała prosta k jest zawarta w~X. item Mając dane wielomiany dwóch zmiennych W_1, W_2 skonstruuj wielomian dwóch zmiennych, który będzie się zerować wtedy i~tylko wtedy, gdy zerują się W_1 i~W_2. item Niech n będzie liczbą nieparzystą. Udowodnij, że wielomian [(x^2+1)(x^2+2^2)dots(x^2+n^2) + 1] nie jest kwadratem wielomianu o~współczynnikach całkowitych. * Udowodnij, że nie jest on kwadratem wielomianu o~współczynnikach rzeczywistych. end{enumerate} subsection{Zadania domowe} begin{enumerate} item Niech $alpha, beta$ będą liczbami niewymiernymi takimi, że $ alpha + beta = 1$. Dowiedź, że $[malpha] + [mbeta] = m-1$ dla każdej niezerowej liczby całkowitej m ($[x]$ oznacza podłogę z~x). item Dla jakich a i~b liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $x^n + ax + b$? item Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji wymiernej $x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^8 + frac{1998}{x}$ dla $x>0$. item * Mając dane dwa rozłączne koła skonstruuj oś potęgową okręgów będących brzegami tych kół. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Wed Apr 06 11:00 PM 2011 C % Last Change: Wed Apr 06 11:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} include{style2} begin{document} section{Zadania domowe -- rozwiązania} begin{enumerate} item Niech $alpha, beta$ będą liczbami niewymiernymi takimi, że $ alpha + beta = 1$. Dowiedź, że $[malpha] + [mbeta] = m-1$ dla każdej niezerowej liczby całkowitej m ($[x]$ oznacza podłogę z~x). begin{sol} Skoro m jest całkowite niezerowe, a~$alpha$ jest niewymierna, to $malpha$ jest niewymierna. Analogicznie niewymierna jest liczba $mbeta$. Z~definicji podłogi mamy $malpha - 1 -[malpha] > -malpha$, czyli $-malpha > -[malpha] -1 > -malpha -1$, więc, znowu z~definicji podłogi $[-malpha] = -[malpha] -1$. Zatem $[mbeta] = [m(1-alpha)] = [m - malpha] = m + [-malpha] = m - 1 -[malpha]$. end{sol} begin{sol}[Alternatywne, dłuższe rozwiązanie] deffr#1{ left{ #1 right}} Skoro m jest całkowite niezerowe, a~$alpha$ jest niewymierna, to $malpha$ jest niewymierna. Analogicznie niewymierna jest liczba $mbeta$. Niech $fr{x} := x - [x]$ dla każdej liczby rzeczywistej (jest to część ułamkowa). Z~określenia podłogi jako największej liczby rzeczywistej nie większej od x wynika, że $fr{x}in [0, 1)$, przy czym $fr{x} in (0, 1)$ jeżeli x jest niecałkowite (w~szczególności dla x niewymiernych). Mamy [fr{malpha} + fr{mbeta} = malpha - [malpha] + mbeta - [mbeta] = m - [malpha] - [mbeta]in mathbb{Z}] ale ustaliliśmy wyżej, że $fr{malpha},fr{mbeta}in (0, 1)$, stąd $fr{malpha} + fr{mbeta} in (0, 2)$, czyli $fr{malpha} + fr{mbeta} = 1$ jest jedyną możliwością. Tym samym [1 = fr{malpha} + fr{mbeta} = m - [malpha] - [mbeta]] co kończy dowód. end{sol} item Dla jakich a i~b liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $x^n + ax + b$? begin{sol} Liczba $alpha$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i~tylko wtedy, gdy $W(alpha) = 0$ i~$W'(alpha) = 0$ (wykład na PROSerwach). $W'(x) = nx^{n-1} + a$, więc $W'(1) = n + a$, czyli $W'(1) = 0 Leftrightarrow a = -n$. $W(1) = 1 + a + b$, więc $W(1) = 0 Leftrightarrow a + b + 1 = 0$. Stąd $W(1) = W'(1) = 0$ jest równoważne $a+b+1 = a + n = 0$, czyli $a = -n, b = -n + 1$. end{sol} item Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji wymiernej $x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^8 + frac{1998}{x}$ dla $x>0$. begin{sol} Z~nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i~geometryczną: [frac{x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^8 + underbrace{frac{1}{x}+ frac{1}{x}+dots +frac{1}{x}}_{1998}}{2002} geq sqrt{x^{1000}cdot x^{900}cdot x^{90}cdot x^{8} cdot left(frac{1}{x}right)^{1998}} = 1] lub, w~notacji ważonej: [frac{x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^8 + frac{1998}{x}}{2002} geq sqrt{x^{1000}cdot x^{900}cdot x^{90}cdot x^{8} cdot left(frac{1}{x}right)^{1998}} = 1] przy czym równość zachodzi dla $x = 1$. Zatem najmniejsza wartość to 2002 i~jest przyjmowana dla $x = 1$. end{sol} item * Mając dane dwa rozłączne koła skonstruuj oś potęgową okręgów będących brzegami tych kół. begin{sol} begin{minipage}{8cm} Poniższe rozumowanie ma niezbyt proste uzasadnienie, lecz oferuje prostą konstrukcyjnie metodę. Przypomnijmy następujące fakty begin{itemize} item jeżeli dwa okręgi przecinają się, to ich oś potęgowa jest prostą przechodzącą przez punkty przecięcia, item prosta potęgowa okręgów jest prostopadła do osi łączącej środki tych okręgów, item dla dowolnych okręgów o_1, o_2, o_3 proste potęgowe o_1 i~o_2, o_2 i~o_3, o_3 i~o_1 mają punkt wspólny. end{itemize} Plan jest następujący: mając dwa rozłączne okręgi o_1, o_2 skonstruować okrąg o_3 przecinający o_1 i~o_2 i~taki, że osie potęgowe o_1 i~o_3 oraz o_1 i~o_2 nie są równoległe. Dla ustalenia uwagi może być to okrąg (patrz rys.) przecinający o_1 i~o_2 w~punktach, w~których przecina je odcinek łączący ich środki. end{minipage}begin{minipage}{8cm} includegraphics{power-axis} end{minipage} Wyznaczamy (to brzmi dumnie) osie potęgowe o_1 i~o_3 oraz o_2 i~o_3 oraz ich punkt przecięcia, który jest punktem na osi potęgowej o_1 i~o_2. Powtarzamy procedurę z~innym okręgiem wyznaczając kolejny punkt na tej osi i~rysujemy prostą przez wyznaczone punkty. end{sol} end{enumerate} end{document}