** **
Zadania PDF.

** **
Obrazek.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Thu Jun 02 12:00 PM 2011 C % Last Change: Thu Jun 02 12:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}

newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{}
newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par}
newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar}
newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar}   defdeg{^{circ}}
defsource#1{\Źródło: #1}   renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant}
renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots}   subimport{../}{style}
%include{style}   begin{document} section{Ściemka!\[-1.3cm]{scriptsize Czyli po co ludziom
dowody?}}   emph{Niektóre spośród poniższych rozwiązań są błędne merytorycznie,
a~niektóre inne źle zapisane. Przeistocz się w~krwiożerczego Yogiego i~znajdź błędy!}
begin{enumerate}   item begin{thm}   Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $3^n =
x^2 + y^2$ w~liczbach całkowitych   nieujemnych x, y, n.   end{thm}
begin{sol}   Równanie to nie ma rozwiązań.   Dowód: Rozważmy
dowolne rozwiązanie $3^n = x^2 + y^2$. Policzmy możliwe reszty   z~dzielenia x^2
przez 3: $0^2 equiv 0 mod 3, 1^2 equiv 1   mod 3, 2^2 equiv 1mod 3$, zatem
$x^2mod 3in left{ 0, 1   right}$.   Oczywiście $1 + 0 neq 0 mod 3, 1 + 1 neq 0
mod 3$, więc   jedynym sposobem otrzymania po lewej stronie 0 jest $xequiv
0mod 3, y equiv 0 mod 3$. Podstawmy $x=3x', y=3y'$. Wtedy $9(x'^2 + y'^2) = 3^n$,
czyli $x'^2 + y'^2 = 3^{n-2}$. Rozumujemy   analogicznie i~stwierdzamy, że $x' = 3x'', y'
= 3y''$. Procedurę   tę możemy kontynuować dowolnie wiele razy, więc wnioskujemy, że
x'', y'' są podzielne przez 3^k dla dowolnego k, co daje   sprzeczność.
end{sol}   item begin{problem}   Trapez $ABCD$ o~podstawach AB i~CD jest
taki, że $AC = 1, BD =   sqrt{3}, angle ABD = 30^circ$. Wyznacz najmniejszą możliwą
sumę długości podstaw tego trapezu.   end{problem}   begin{sol}
begin{minipage}{10cm}   Niech H_D, H_C oznaczają rzuty D, C na AB, E
oznacza   punkt przecięcia przekątnych trapezu, a~$C'in AB$ jest takie,   że
$CDBC'$ jest równoległobokiem.   Obliczamy, że $DH_D = sqrt{3}/2$, gdyż trójkąt
BDH_D ma kąty $30^circ, 60^circ, 90^circ$ i~$BD = sqrt{3}$. Zatem
$AH_C = sqrt{AC^2 - CH_C^2} = sqrt{1 - DH_D^2} =   sqrt{1 - frac{3}{4}} = frac{1}{2}$,
czyli trójkąt AH_CC jest połówką trójkąta równobocznego i~$ angle CAH_C =
60^circ$.   Skoro $CC' parallel BD$, to $ angle CC'A = angle DBA =
30^circ$, więc $ angle ACC' = 180^circ - 60^circ -   30^circ = 90^circ$.
end{minipage}begin{minipage}{6cm}   includegraphics{trapez}   end{minipage}
Trójkąt $ triangle ACC'$ jest   prostokątny, zatem z~twierdzenia Pitagorasa
$AB + CD = AC' = sqrt{AC^2 + CC'^2} =   sqrt{AC^2 + CC'^2} = sqrt{1 + 3} = 2$. Jest
to jedyna   możliwa wartość sumy podstaw, więc jest ona najmniejsza.   end{sol}
item begin{problem}   Wartość wielomianu $f(x) = x^{2011} + a_{2010}x^{2010} +
dots +   a_0$ o~współczynnikach całkowitych jest dla   każdej liczby całkowitej
podzielna przez 2011 oraz $f(x)$ ma 2011 różnych pierwiastków. Udowodnij, że
suma tych   pierwiastków jest podzielna przez 2011.   end{problem}
begin{sol}   Udowodnię, że $f equiv x^{2011} - x mod 2011$, tzn.   współczynniki
wielomianu $f - x^{2011} - x$ są podzielne przez 2011.   Niech $g:= f -
x^{2011} - xmod 2011$. Wielomian g ma stopień   nie większy niż 2010. Dla
dowolnej liczby całkowitej m zachodzi $m^{2011} equiv m mod 2011$ bo 2011 jest
pierwsza,   czyli $2011Big| f(m) + m^{2011} - m = g(m)$.   To znaczy, że
wielomian g ma pierwiastki ($mod 2011$) $0, 1,   2, 3,dots, 2010$, czyli $g(x) =

Q(x)(x-0)(x-1)dots (x-2010)mod 2011$. Gdyby $Qneq 0$ to wielomian po prawej stronie miałby stopień $geq 2011$, czyli większy niż g. Tak więc $Q = 0$ i~$g = 0$, czyli $f - x^{2011} - x equiv 0mod 2011$, więc 2011 musi dzielić a_{2010}, bo a_{2010} jest współczynnikiem wielomianu $f - x^{2011} - x$ stojącym przy x^{2010}. Zachodzi $2011Big|a_{2010}$, ale a_{2010} jest równe (-1) pomnożonemu przez sumę pierwiastków f. Tak więc 2011 dzieli tę sumę pierwiastków. end{sol} item begin{problem} Liczby rzeczywiste $x_1,dots,x_{2010}$ są takie, że $x^3_1 + x^3_2 + dots + x^3_{2010} = 2010$. Podać najmniejsze możliwe M rzeczywiste takie, że $x_1^2 + dots + x_{2010}^2 leq M$ albo udowodnić, że takie M nie istnieje. end{problem} begin{sol} Przypomnijmy nierówność pomiędzy średnią kwadratową i~sześcienną: begin{thm} Dla dowolnych $n, a_1,dots,a_{n} > 0$ zachodzi [sqrt{frac{a_1^2 + a_2^2 + dots + a_{n}^2}{n}} leq sqrt[3]{frac{a_1^3 + dots + a_{n}^3}{n}}] end{thm} Stosując tę nierówność dla $n := 2010$, $a_1 := x_1, a_2 := x_2, dots, x_{2010} := a_{2010}$ pokazujemy, że [sqrt{frac{x_1^2 + dots + x_{2010}^2}{2010}} leq sqrt[3]{frac{x_1^3 + dots + x_{2010}^3}{2010}} = 1] Zatem $x_1^2 + dots + x_{2010}^2 leq 2010$. Wartość ta jest osiągana, jeżeli weźmiemy $x_1 = x_2 = dots = x_{2010}$, czyli $M= 2010$ jest szukaną liczbą. end{sol} end{enumerate} end{document}