Liczby zespolone

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
środa, 02 marca 2011 20:06 -

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: tresc.tex % Created: Wed Feb 23 11:00 PM 2011 C % Last Change: Wed Feb 23 11:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{fact}[thm]{Obserwacja} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} include{style} begin{document} section{Pooemowe kółko} defi{mathbf{i}} defcc #1{overline{#1}} defRe{operatorname{Re}} defIm{operatorname{Im}} subsection{Trochę teorii} begin{enumerate} item begin{defn}[Liczba zespolona] Liczba zespolona to liczba postaci [z = a + bi] gdzie a,b rzeczywiste, a i to jednostka urojona, spełniająca $i^2 = -1$. Liczbę a nazywamy emph{częścią rzeczywistą} z i oznaczamy $Re z$, liczbę b nazywamy emph{częścią urojoną} z i oznaczamy $Im z$ (oznaczenia od ang. Real and Imaginary). end{defn} item Mówimy, że liczba zespolona jest emph{rzeczywista}, jeżeli $b=0$ a emph{czysta}, albo emph{urojona}, jeśli $a=0$. item Na liczbach zespolonych określamy działania: [(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i] [-(a+bi) = -a - bi] [

(a+bi)(c+di) = ac+adi +bci+ bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i] [frac{1}{a+bi} = frac{a-bi}{a^2 + b^2} = frac{a}{a^2 + b^2} -frac{b}{a^2 + b^2}i] Mnożenie jest przemienne i w ogóle wszystko jest ``normalne''. item begin{defn}[Sprzężenie] Dla $z = a + bi$ liczbę [a - bi] nazywamy emph{sprzężeniem} z i oznaczamy $cc{z}$. Operacja $z rightarrow cc{z}$ to odbicie względem osi OY, nic dziwnego więc, że gra ona dobrze z~dodawaniem i~mnożeniem: [cc{apm b} = cc{a} pm cc{b}, cc{ab}=cc{a}cc{b}, cc{1/a} = 1/cc{a}] end{defn} item begin{defn}[Moduł] Liczbę (rzeczywistą!) $sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy emph{modułem} liczby z i oznaczamy $|z|$; liczba $cc{z}$ ma taki sam moduł: $a^2 +b^2 = a^2 + (-b)^2$. Ponadto zachodzi [zcc{z} = |z|^2] Moduł jest interpretowany, podobnie jak wartość bezwzględna w~$mathbb{R}$, jako odległość od 0. end{defn} item begin{fact}[Interpretacja geometryczna] Liczbę zespoloną $a+bi$ możemy utożsamiać z punktem płaszczyzny (a,b), łatwo wtedy widać, że $|z|$ jest odległością od 0 tej liczby. Niech $alpha$ będzie kątem pomiędzy osią OX o prostą przechodzącą przez $(0,0)$ i (x,y). Wtedy [z = |z|(cos alpha + isinalpha)] end{fact} item begin{thm}[Podstawowa metoda] Pomijając warstwę formalną, liczby zespolone zadają nam mnożenie punktów płaszczyzny, więc dodatkową operację, sprawiającą, że wiele przekształceń, zwłaszcza obroty, daje się zapisać ``naturalniej'' przez mnożenie. end{thm} end{enumerate} subsection{Techniczne} begin{enumerate} item* Udowodnij, że $|z|=0$ wtedy i~tylko wtedy, gdy $z=0$ (tylko 0 jest w~odległości 0 od 0 $ddotsmile$). item* Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że $z=cc{z}$ i wszystkie takie, że $z=-cc{z}$. item* Stwierdź, jaką figurę opisuje równanie $|z-r| = s$, dla r,s ustalonych, s rzeczywistego dodatniego. item* Udowodnij begin{thm}[Wzór de Moivre] [(cos alpha + i sin alpha)(cos beta + i sin beta) = cos (alpha + beta) + i sin(alpha + beta).] end{thm} item* Uzasadnij, że przekształcenie $z rightarrow (cos alpha + i sin alpha)z$ to obrót o~kąt $alpha$ wokół 0. Jak zapisać wzorem obrót wokół dowolnego punktu? end{enumerate} subsection{Geometryczne} begin{enumerate} item* begin{problem} Załóżmy, że liczby $a,bin mathbb{C}$ leżą na okręgu jednostkowym. Pokazać, że begin{enumerate} item Punkt $frac{a+b}{2}$ to środek odcinka ab, item Punkt $sqrt{ab}$ to środek łuku $arc{ }ab$, item Punkt $frac{2}{frac{1}{a} + frac{1}{b}}$ to punkt przecięcia stycznych do okręgu jednostkowego w~a i~b. end{enumerate} end{problem} item* begin{problem} Na bokach AC i~BC trójkąta $ triangle ABC$ wybudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty prostokątne równoramienne $triangle ACY$ i~$ triangle BCX$ (katy proste przy wierzchołkach X, Y). Uzasadnić, że punkt M~--- środek boku AB oraz punkty X, Y tworzą trójkąt prostokątny równoramienny. end{problem} item* begin{problem} Na bokach trójkąta $ triangle ABC$, po zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty równoboczne $ triangle BCX$, $triangle CAY$, $triangle ABZ$. Udowodnić, że środki ciężkości tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny. end{problem} item* begin{problem} Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Na jego bokach zbudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty prostokątne równoramienne $ triangle ABP, triangle BCQ, triangle CDR$ i~$triangle DAS$ o~kątach prostych odpowiednio przy wierzchołkach P, Q, R, S. Wykazać, że odcinki PR i~QS są prostopadłe i~równej długości. end{problem} item* begin{problem} Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym trójkąty BCP i~DAP są równoboczne. Na bokach AB i~CD tego czworokąta zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ABK

i~CDL. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABK i~CDL pokrywają się.
end{problem} end{enumerate} end{document}