Koniec nierówności

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
czwartek, 31 marca 2011 21:17 -

[** **
Zadania PDF.]

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Sun Mar 27 05:00 PM 2011 C % Last Change: Sun Mar 27 05:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 26cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style} %include{style} begin{document} setlength{topmargin}{-0.75in} section{Równość!\[-1.3cm]{scriptsize(czyli koniec nierówności)}} subsection{Przypomnienie} begin{enumerate} item begin{thm}[Średnie] Jeżeli liczby a_1,a_2cdots,a_n są dodatnie, to [frac{n}{frac{1}{a_1}+frac{1}{a_2}+cdots+frac{1}{a_n}}leq sqrt[n]{a_1a_2cdots a_n}leq frac{a_1+a_2+cdots+a_n}{n}leq sqrt{frac{a_1^2+a_2^2+cdots+a_n^2}{n}}] emph{W~dowolnej z~nierówności równość zachodzi wtedy i~tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = dots = a_n$.} end{thm} emph{Uwaga: jeżeli wyrażenia mają sens również gdy $a_1,dots, a_n$ są nieujemne (np. śr. arytmetyczna i~geometryczna, ale nie harmoniczna) to również dla tego przypadku nierówności zachodzą.} item begin{thm}[Średnie ważone] Jeżeli liczby $a_1,dots,a_n$ są dodatnie, zaś liczby\ $w_1,dots,w_nin [0, 1]$ sumują się do 1 to [frac{1}{frac{w_1}{a_1} + frac{w_2}{a_2} + dots + frac{w_n}{a_n}}leq a_1^{w_1}cdot a_2^{w_2} cdot dots cdot a_n^{w_n} leq w_1a_1 + dots + w_na_n leq sqrt{w_1a_1^2 + dots + w_na_n^2}.] end{thm} emph{Dla każdej nierówności prawdą jest, że równość zachodzi wtedy i~tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = dots = a_n$, w~przypadku, gdy $w_i > 0$.} item begin{thm}[Nierówność Schwarza] Jeżeli n jest liczbą całkowitą, a $u_1,u_2,dots,u_n,t_1,t_2,dots,t_n$ są liczbami rzeczywistymi to [(u_1^2 + dots + u_n^2)(t_1^2 + dots + t_n^2) geq (u_1t_1 + dots + u_nt_n)^2] emph{Równość zachodzi wtedy i~tylko wtedy, gdy istnieje taka stała C, że $u_i = Ct_i$ dla wszystkich i.} end{thm} item defabs#1{left| #1 right|} begin{thm}[* Nierówność Ptolemeusza] Dla każdych czterech punktów na płaszczyźnie A, B, C, D zachodzi [abs{AB}cdotabs{CD} + abs{BC}cdot abs{DA} geq abs{AC}cdotabs{BD}.] end{thm} item begin{lem}[Taka sobie nierówność $ddotsmile$] Jeśli liczby x, y, z są nieujemne to [(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)leq xyz.] end{lem} end{enumerate} subsection{Zadania domowe} begin{enumerate} item Niech ciąg liczb $a_0, a_1,dots,a_n$ będzie zdefiniowany przez [a_0 = 3, quad (3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18] Oblicz, w~zależności od n, sumę $sum_{i=0}^n frac{1}{a_i}$. item Niech x będzie liczbą rzeczywistą z~przedziału $left[frac{3}{2}, 5right]$. Udowodnij, że [2sqrt{x+1} + sqrt{2x - 3} + sqrt{15 - 3x} < 2sqrt{19}.] emph{Uwaga: dowody nierówności z~większą stałą po prawej stronie mogą być ocenione na 2 pkt (ale nie muszą).} item begin{thm}[Nierówność Schura] Niech x, y, z będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że dla każdej liczby dodatniej r zachodzi [x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) geq 0.] end{thm} item Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi [3abc + a^3 + b^3 + c^3 geq 2left((ab)^{frac{3}{2}} + (bc)^{frac{3}{2}} + (ca)^{frac{3}{2}} right).] item Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c takich, że $abc = 1$ zachodzi [left(a - 1 + frac{1}{b} right)left(b - 1 + frac{1}{c} right)left(c - 1 + frac{1}{a} right) leq 1.] end{enumerate} end{document}