Wpisany przez Joachim Jelisiejew
czwartek, 26 maja 2011 20:44 -

 
Zadania PDF.

## Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Wed May 25 11:00 PM 2011 C % Last Change: Wed May 25 11:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb, amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % ------------------------------------------------------------ vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ------------------------------------------------------- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newcommand{abs}[1]{leftvert#1rightvert} newenvironment{proof}[1][Dowód. ]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style} %include{style} begin{document} section{prePTM} subsection{Pierwszaki} begin{enumerate} item Punkt $D$ należy do wnętrza trójkąta $triangle ABC$. Udowodnić, że $ angle ADB > angle ACB$. item Dowieść, że jeśli $a,b,c,x$ są liczbami dodatnimi takimi, że $abc = 1$ to [ (x+a)(x+b)(x+c) geq (x+1)^3. ] item Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia [abs{a_2 - a_1} + abs{a_3 - a_2} + dots + abs{a_n - a_{n-1}} + abs{a_1 - a_n}] jeżeli ciąg $a_1,dots,a_n$ jest permutacją ciągu $1,2,dots,n$? item emph{Być może było u~Seby.} Niech $H$ będzie punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego $triangle ABC$, a~punkty $D, E, F$ będą spodkami wysokości tego trójkąta. Wykazać, że $H$ jest środkiem okręgu wpisanego w~$ triangle DEF$. item Dane są liczby rzeczywiste $ageq 1, bgeq 2, cgeq 3$. Wykazać, że [abcgeq a + b + c.] item Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x, y, z$ spełniające układ równań [ left{begin{array}[]{c} x + y = 2\ xy - z^2 = 1. end{array}right. ] end{enumerate} subsection{lvl II} begin{enumerate} item W~okrąg wpisano równoboczny trójkąt $ABC$. Dowieść, że jeśli $M$ jest dowolnym punktem tego okręgu, to jedno z~odległości $MA, MB, MC$ jest równa sumie pozostałych. item Niezerowy wielomian $f(x)$ o~współczynnikach rzeczywistych ma własność, że wielomian $f(x^2 + x + 1)$ jest podzielny przez $f(x)$ tzn. istnieje wielomian $g(x)$ taki, że $f(x)g(x) = f(x^2 + x + 1)$. Udowodnić, że $f(x)$ ma parzysty stopień. item Punkty $A, B, C$ należą do okręgu $o$, punkt $M$ jest środkiem tego łuku $AB$, który nie zawiera $C$, zaś $N$ jest środkiem tego łuku $BC$, który nie zawiera $A$. Odcinki $AB, BC$ przecinają $MN$ w~punktach $P, Q$ odpowiednio. Udowodnić, że $BP = BQ$. item Liczby $x_1,dots,x_{2011}in (0, 1]$ są takie, że jeśli podzielimy je na dwa zbiory to w~którymś z~nich suma liczb jest nie większa niż $1$. Uzasadnić, że suma wszystkich liczb jest nie większa niż $3$. $star$ Udowodnić, że stałej $3$ nie da się poprawić. end{enumerate} emph{Zadania geometryczne pochodzą z~książki ``Geometria elementarna'', zaś niektóre pozostałe zadania~--- z~czasopisma ``Delta''} end{document}