

Kółko dla obu kategorii

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 22 maja 2011 21:27 -



[](#)
[Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
% File: zad.tex % Created: Thu May 19 11:00 AM 2011 C % Last Change: Thu May
19 11:00 AM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt
headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol}
% ----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small %
THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]
newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{}
newenvironment{proof}[1][Dowód. ]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par}
newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar}
newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}} {hfillpar} defdeg{^{\circ}}
defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{\overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{\leqslant}
renewcommand{geq}{\geqslant} renewcommand{dots}{\ldots} include{style}
begin{document} section{Przed PTMem[-1.5cm]{small czyli i~tak zrobimy tę pracę domową!}}
subsection{Zadania dla klas pierwszych} begin{enumerate} item Dany jest czworokąt
wypukły $ABCD$. Punkty $P, Q, R, S$ są punktami przecięcia dwusiecznych kątów
zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że na czworokącie $PQRS$ można
opisać okrąg. item Okręgi $o_1$ i~$o_2$ są styczne zewnętrznie w~punkcie $B$ oraz
styczne do prostej $k$ w~punktach $A$ i~$C$ odpowiednio. Wykaż, że $\angle ABC =
90^{\circ}$. item Rozstrzygnij, czy równanie $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ ma rozwiązanie
w~liczbach całkowitych  $\text{textbf{dodatnich}}$  $x, y, z, t$. item* Niech $C_n := 2^{2^n} - 1, F_n :=
2^{2^n} + 1$. Uzasadnij, że: begin{enumerate} item jeżeli $m \leq n$ to $C_m \mid C_n$
```

Kółko dla obu kategorii

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 22 maja 2011 21:27 -

C_n . item dla każdego m zachodzi $F_m \mid C_{m+1}$, a więc jeżeli $m < n$ to $F_m \mid C_n$. item Liczby F_n i F_m są względnie pierwsze dla $m \neq n$. end{enumerate} item Eliminacje do konkursu matematycznego składały się z trzech zadań punktowanych w skali $0, 2, 5, 6$. W eliminacjach wystartowało 18 zawodników. Udowodnij, że pewne dwie osoby uzyskały ten sam wynik. Czy liczbę 18 z treści zadania można zastąpić mniejszą tak by teza nadal zachodziła? item Liczby a_1, \dots, a_{2011} są permutacją liczb $1, 2, \dots, 2011$. Uzasadnij, że iloczyn $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_{2011} - 2011)$ jest parzysty. end{enumerate} subsection{Zadania dla klas drugich} begin{enumerate} item Niech a i b będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Liczbę naturalną n nazwiemy *dobrą*, jeżeli istnieją takie liczby całkowite nieujemne x, y , że $n = ax + by$. begin{enumerate} item Udowodnić, że liczba $n_0 = (a-1)(b-1)-1$ nie jest dobra, item $a \sim n_0 + 1$ i każda większa jest dobra. end{enumerate} item Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. begin{enumerate} item Uzasadnij, że liczba a jest resztą kwadratową $\pmod p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. item Uzasadnij, że jeśli g jest generatorem $\pmod p$ i a nie jest resztą kwadratową $\pmod p$, to $(ag)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$ i w związku z tym ag nie jest generatorem $\pmod p$. end{enumerate} item Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt M jest środkiem przekątnej AC i $\angle AMB = \angle AMD$. Wykazać, że $MA^2 = MB \cdot MD$. item Dany jest okrąg ω oraz punkty A i B . Skonstruować okrąg styczny do okręgu ω , przechodzący przez punkty A i B . item Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A . Wspólna styczna zewnętrzna tych okręgów przecina prostą łączącą ich środki w punkcie S . Prosta przechodząca przez S przecina okręgi ω_1 i ω_2 kolejno w punktach B, C, D, E . Wykazać, że kąt $\angle BAD$ jest prosty. end{enumerate} end{document}