I kółko rankingowe

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
czwartek, 24 marca 2011 20:20 -

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Fri Mar 18 09:00 AM 2011 C % Last Change: Fri Mar 18 09:00 AM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 26cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newenvironment{problem}{noindenttextsc{Zadanie}\} {hfillpar} defdeg{^{circ}} defsource#1{\emph{Źródło: #1}} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style} %include{style} begin{document} setlength{topmargin}{-0.6in} section{OMG i~wspominki} begin{enumerate} item Czy istnieją takie liczby całkowite a i~b, że liczby [a^2 + b hbox{ oraz } b^2 + a] są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij. item Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w~trójkąt ABC. Okrąg styczny do AI w~punkcie I i~przechodzący przez punkt B przecina bok BC w~punkcie P (różnym od B). Proste IP i~AC przecinają się w~punkcie Q. Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ. item Liczby p i~q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$. item Wewnątrz koła o~promieniu 1 znajdują się punkty

$A_1,A_2,A_3,dots,A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P, dla którego [PA_1 + PA_2 + dots + PA_{100} geq 100.] source{Zadania pochodzą z~finału VI OMG} item Rozważmy sześcian $ABCDA'B'C'D'$. begin{enumerate} item Uzasadnij, że obrót wokół osi AC', w~którym punkt D' przechodzi na B', przenosi sześcian $ABCDA'B'C'D'$ w~siebie tzn. każdy punkt sześcianu przechodzi na punkt sześcianu. item Oblicz, ilukrotne złożenie powyższego obrotu jest identycznością? item Podzielmy sześcian $ABCDA'B'C'D'$ na 27 sześcianików jednostkowych. Wskaż sześcianiki, które przechodzą w~siebie przy ww. obrocie. item Niech pi będzie płaszczyzną prostopadłą do AC' i~przechodzącą przez środek tego odcinka. Uzasadnij, że ww. obrót zachowuje pi oraz że ilość sześcianików, które przecina pi musi przystawać do $1 mod 3$. item * Rozważ symetrię względem środka sześcianu i~rozszerz poprzednie rozumowanie, aby wykazać, że ilość sześcianików, które przecina pi, przystaje do $1 mod 6$. item * Wykaż, że część wspólna pi i~$ABCDA'B'C'D'$ to sześciokąt foremny o~wierzchołkach leżących na środkach tych krawędzi sześcianu, których ``końcem'' (wierzchołkiem) nie jest A lub C'. end{enumerate} item Przypomnijmy, że $varphi(n)$ oznacza ilość liczb naturalnych względnie pierwszych z~liczbą całkowitą dodatnią n i~nie większych od n. Np. $varphi(12) = 4$, $varphi(p) = p-1$ dla każdej liczby pierwszej p, $varphi(1) = 1$ itd. begin{enumerate} item Liczby ze zbioru ${1,2,dots,n}$ możemy w~naturalny sposób utożsamić z~resztami z~dzielenia przez n (jak ktoś nie zrozumiał, to nie szkodzi) i~oznaczać $1mod n, 2mod n,dots, n mod n$. item Niech $n = ab$ będzie takim iloczynem, że $NWD(a,b) = 1$. Uzasadnij, że liczba $x mod n$ jest względnie pierwsza z~n wtedy i~tylko wtedy, gdy $xmod a$ jest względnie pierwsze z~a i~$xmod b$ jest względnie pierwsze z~b. item Uzasadnij, że istnieje dokładnie $varphi(a)varphi(b)$ liczb względnie pierwszych z~n i~mniejszych od n; każda z~tych liczb jest wyznaczona przez reszty $mod a$ i~$mod b$. emph{Wskazówka: chińskie o~resztach.} item Stąd też $varphi(n) = varphi(a)varphi(b)$ o~ile tylko $NWD(a,b) = 1$. Podaj przykład, że założenie $NWD(a,b)=1$ jest istotne. item Oblicz ``na piechotę'' $varphi(p^k)$, gdzie p jest pierwsze i~udowodnij wzór [varphi(n) = (p_1^{alpha_1} - p_1^{alpha_1 - 1})cdot (p_2^{alpha_2} - p_2^{alpha_2 - 1})cdot dotscdot (p_n^{alpha_n} - p_n^{alpha_n - 1}) = nleft(1 - frac{1}{p_1}right)dotsleft(1 - frac{1}{p_n} right).] jeżeli $n = p_1^{alpha_1}p_{2}^{alpha_2}dots p_n^{alpha_n}$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze. end{enumerate} end{enumerate} end{document}