** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: nie kwi 11 12:00 2010 C % Last Change: nie kwi 11 12:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}{noindenttextsc{Dowód.}}{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}{noindenttextsc{Rozwiązanie. }}{par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Trikowe zadania} begin{enumerate} item Liczby całkowite dodatnie $a

Źródło rozwiązań w texu.

% File: zad.tex % Created: nie kwi 11 12:00 2010 C % Last Change: nie kwi 11 12:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}{noindenttextsc{Dowód.}}{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}{noindenttextsc{Rozwiązanie. }}{par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{Źródło: #1} begin{document} section{Trikowe zadania -- rozwiązania} begin{enumerate} item Liczby całkowite dodatnie $a n$. Załóżmy (dowód przez sprzeczność), że $a_1,dots,a_kgeq n$. Wtedy $$n = frac{a_1 + dots + a_n}{k} geq frac{a_1 + (k-1)n}{k} > n$$ sprzeczność. Obserwacja jest dowiedziona. Załóżmy, że nie wszystkie liczby są równe. Zauważmy, że wtedy pewne 2 liczby textbf{sąsiednie} muszą nie być równe, a więc istnieją liczby sąsiednie $n_0 > n_1$. Z obserwacji wynika, że wśród liczb sąsiadujących z n_1 musi być liczba od niej mniejsza $n_2
n_1 > n_2 > dots > n_s > n_{s+1} > dots$$ Ale to jest nonsens! Wszystkie liczby napisane były naturalne, więc wszystkie liczby z tego nieskończonego ciągu musiałyby być liczbami ze skończonego przedziału $left{ n_0, n_0 - 1, dots, 0 right}$. Sprzeczność. emph{Ciekawą sprawą w tym rozwiązaniu jest jego ogólność -- nie korzystaliśmy z prawie żadnych własności liczb sąsiednich.} end{proof} item Niech a, b, c będą bokami trójkąta. Czy z odcinków o długościach $sqrt{a},sqrt{b},sqrt{c}$ da się zbudować trójkąt? textbf{Odpowiedź:} Tak. begin{proof} Musimy, tak naprawdę, pokazać, że liczby $sqrt{a},sqrt{b},sqrt{c}$ spełniają nierówność trójkąta. Udowodnię, że $$sqrt{a} + sqrt{b} > sqrt{c}$$ pozostałych nierówności dowodzimy analogicznie. Zachodzi nierówność $$sqrt{a} + sqrt{b} > sqrt{a+b}$$ Istotnie, obie wymienione liczby są dodatnie, a po podniesieniu do kwadratu uzyskujemy trywialnie prawdziwą nierówność $$(sqrt{a} + sqrt{b})^2 = a + b + 2sqrt{ab} > a + b = sqrt{a+b}^2$$ Co więcej liczby a,b,c są długościami boków pewnego trójkąta, więc $a+b > c$ a więc i $sqrt{a+b} > sqrt{c}$. $$sqrt{a} + sqrt{b} > sqrt{a+b} > sqrt{c}$$ end{proof} item Iloczyn dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c wynosi 1. Wykaż, że $$ab^2 + bc^2 + ca^2 geq ab + bc + ca$$ begin{proof} emph{Mógłbym oczywiście przedstawić samo rozwiązanie, ale ze względów dydaktycznych przedstawię także metodę prowadzącą do niego.} Wiemy, że $abc = 1$. Po pierwsze zrównujemy stopnie obu stron (patrz: nierówności tzw. Kurlandczyka) uzyskując nierówność równoważną:

$$frac{ab^2}{sqrt[3]{abc}} + frac{bc^2}{sqrt[3]{abc}} + frac{ca^2}{sqrt[3]{abc}} geq ab + bc + ca$$ emph{Droga do rozwiązania.} Zgadujemy teraz (co nie jest takim zwykłym strzałem, jeżeli się zrobiło już dużo zadań z nierówności), że tę nierówność można udowodnić stosując średnią arytmetyczną i geometryczną (ważoną), innymi słowy nierówność: $$alpha_1 a_1 + dots + alpha_n a_n geq a_1^{alpha_1}cdot dots cdot a_n^{alpha_n}$$ gdzie $a_1, dots, a_n, alpha_1, dots, alpha_n > 0 alpha_1 + dots + alpha_n = 1$. emph{Ta nierówność tylko innym sposobem zapisania nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną, jeżeli liczby $alpha_1,dots,alpha_n$ są wymierne.} Zapisujemy pożądaną nierówność ogólnie: $$alpha frac{ab^2}{sqrt[3]{abc}} + beta frac{bc^2}{sqrt[3]{abc}} + gamma frac{ca^2}{sqrt[3]{abc}} geq left(frac{ab^2}{sqrt[3]{abc}} right)^alpha left(frac{bc^2}{sqrt[3]{abc}} right)^beta left(frac{ca^2}{sqrt[3]{abc}} right)^gamma = ab$$ gdzie $alpha + beta + gamma = 1$. Ostatnia równość jest naszym marzeniem i wymaganiem. Rozpisujemy ją w postaci układu równań (wynikłego z porównania wykładników przy a,b,c): $$left{begin{array}{c} alpha + 2gamma - 1/3 = 1\ beta + 2alpha - 1/3 = 1\ gamma + 2beta - 1/3 = 0\ end{array}right.$$ Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $(alpha,beta,gamma) =left(2/3, 0, 1/3right)$. emph{Koniec drogi -- doszliśmy do rozwiązania} Jak więc wystarczy udowodnić lub sprawdzić nierówność z zadania wynika z trzech nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną (ważoną): $$begin{array}{c} dfrac{2}{3}dfrac{ab^2}{sqrt[3]{abc}} + dfrac{1}{3}dfrac{ca^2}{sqrt[3]{abc}} geq ab\ dfrac{2}{3}dfrac{bc^2}{sqrt[3]{abc}} + dfrac{1}{3}dfrac{ab^2}{sqrt[3]{abc}} geq bc\ dfrac{2}{3}dfrac{ca^2}{sqrt[3]{abc}} + dfrac{1}{3}dfrac{bc^2}{sqrt[3]{abc}} geq ca\ end{array}$$ emph{Gdy zna się metode, rozwiązanie nie jest trikowe, ale gdybyśmy zobaczyli je nie znając metody, byłoby :]} end{proof} item Danych jest 2010 liczb całkowitych $a_1,dots,a_{2010}$. Pokazać, że można wybrać pewną ilość kolejnych wyrazów tego ciągu tak, że ich suma jest podzielna przez 2010. begin{proof} Niech $b_i = a_1 + dots + a_i$ dla $i=1,dots,2010$, ponadto niech $b_0 = 0$ (suma pustego ciągu indeksów). Zauważmy, że jeżeli $2010 | b_i - b_j$ dla pewnych $i neq j$, to poszukiwany podciąg istnieje (jeżeli $i < j$ to jest on równy $a_{i+1} + dots a_j$). Mamy 2011 liczb b_i i tylko 2010 możliwych reszt z dzielenia przez 2010. Pewne dwie liczby muszą dawać taką samą resztę. To kończy dowód. end{proof} item We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku długości 101 danych jest 10203 punktów. Uzasadnić, że pewna para punktów leży w odległości co najwyżej 1 od siebie. begin{proof} Trójkąt równoboczny o boku 101 da się podzielić na 101^2 trójkącików równobocznych o boku 1. Zachodzi $101^2 = 10201 < 10203$, więc w pewnym z tych trójkątów będą leżeć 2 punkty. Pozostaje uzasadnić, że najdłuższym odcinkiem w trójkącie jest pewien jego bok, pozostawiam to czytelnikom :) . end{proof} source{Staszic, mathlinks,Art Of Problem Solving i nie wiem co jeszcze} end{enumerate} end{document}