Wpisany przez Joachim Jelisiejew
wtorek, 09 lutego 2010 19:00 - Poprawiony wtorek, 09 lutego 2010 19:07

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadania.tex % Created: pon lut 08 08:00 2010 C % Last Change: pon lut 08 08:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} defi{operatorname{i}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Wzory skróconego mnożenia} paragraph{Teoria} Dla liczb $a,bin mathbb{R}$ oraz $nin mathbb{N}$ zachodzi: begin{enumerate} item $$(a + b)^n = binom{n}{0}a^n +binom{n}{1}a^{n-1}b + dots + binom{n}{n}b^n$$ item $$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + dots + b^{n-1})$$ item Jeżeli $2not| n$ to $$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - dots + b^{n-1})$$ item * Dla liczb zespolonych $z_1, z_2in mathbb{C}$ zachodzi jeszcze np. $$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 +i z_2)(z_1 - i z_2)$$ gdzie i jest jednostką urojoną (emph{patrz kółko o zespolonych z 2008r.}). end{enumerate} Te wszystkie własności są bardzo ogólne -- dowody są na poziomie algebry, co znaczy, że można stosować w wielu sytuacjach. {footnotesize emph{Na poziomie licealnym wzory skróconego mnożenia stosuje się głównie dla liczb całkowitych, wielomianów całkowitych itp.} } paragraph{Wnioski} begin{enumerate} item Jeżeli liczby $a neq b$ są całkowite, to $$a - b | a^n - b^n$$ dla wszystkich naturalnych n. W szczególności $$a - 1 | a^n - 1$$ $$a + 1 | a^{2k+1} + 1$$ item Jeżeli wielomian W ma współczynniki całkowite to $$a - b | W(a) - W(b)$$ dla wszystkich liczb całkowitych $aneq b$. item (twierdzenie B`ezout) dla każdego $ain mathbb{R}$ zachodzi $$x - a | W(x) - W(a)$$ gdzie napis $r(x) | s(x)$ oznacza, że istnieje taki wielomian $q(x)$, że $s(x) = r(x)q(x)$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla liczby całkowitej a i wielomianów o współczynnikach całkowitych. end{enumerate} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item (ważne!) Uzasadnić, że jeżeli liczba $$2^k + 1$$ jest pierwsza, to $k = 2^l$ dla pewnego $lin mathbb{Z}_{geq 0}$. item Uzasadnić, bez trudnych obliczeń, że $$43 | 6^4 + 6^2 + 1$$ item Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których $$n^n + 1 hbox{ oraz } (2n)^{2n} + 1$$ są liczbami pierwszymi. source{LVI OM} item Niech q będzie liczbą parzystą dodatnią. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $$q^{(q+1)^n} + 1$$ dzieli się przez $(q+1)^{n+1}$ ale nie dzieli się przez $(q+1)^{n+2}$. source{XXXIII OM, via artykuł H. Pawłowskiego} item Udowodnić, że zachodzi $x^2 + x + 1 | x^{1985} + x + 1$, a dokładniej, że istnieje taki wielomian $p(x)$ o współczynnikach całkowitych, że $$x^{1985} + x + 1 = (x^2 + x + 1)p(x)$$ (w założeniu należy to zrobić bez wyliczania $p(x)$). end{enumerate} end{document}