Studia -- analiza matematyczna

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
wtorek, 09 marca 2010 22:10 - Poprawiony wtorek, 09 marca 2010 22:13

** **
Skrypt PDF.

Źródło skryptu w texu.

% File: tresc.tex % Created: nie mar 07 12:00 2010 C % Last Change: nie mar 07 12:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdowod{$ $\textbf{Dowód}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Analiza matematyczna} emph{Została mała przyjemność -- przejdźmy do granicy.}\ dr textsc{M. Bobieński} (wykładowca AM) paragraph{Teoria} begin{enumerate} item emph{Poniższa definicja jest wprowadzona dla porządku -- nie mam szans (ani chęci) rozwijać w 1,5h całej teorii granic i pochodnych.} begin{defn} Jeżeli dana jest funkcja $f: mathbb{R} rightarrow mathbb{R}$ oraz ustalony jest punkt $x_0in mathbb{R}$, to textbf{pochodną} funkcji f nazywamy funkcję $$f'(x) := lim_{h rightarrow 0} frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$ dla sensownych funkcji ta pochodna istnieje.\ Funkcje, które mają pochodną ciągłą (mniejsza co to znaczy) nazywamy textbf{różniczkowalnymi}, wszystkie sensowne funkcje są różniczkowalne. end{defn} item Geometrycznie wartość pochodnej w punkcie $f'(x_0)$ interpretuje się jako współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu f w punkcie x_0. item begin{defn} Określamy drugą pochodną funkcji f jako pochodną pochodnej funkcji f, co oznaczamy (o dziwo) f'', trzecią pochodną jako pochodną drugiej pochodnej i tak dalej. Ogólniej n-tą pochodną oznaczamy

$f^{(n)}$. end{defn} Oczywiście mówimy tutaj o przypadku, gdy pochodne istnieją. item Mała tabelka pochodnych: $$begin{array}{c c c} hbox{Funkcja} & hbox{Pochodna} & \ hbox{funkcja stała} & 0 & \ x & 1 & \ x^n & nx^{n-1} & hbox{ dla }nin mathbb{R}, nneq 0\ sin(x) & cos(x) & \ cos(x) & -sin(x) & \ e^x & e^x & \ ln(x) & frac{1}{x} & \ end{array}$$ Liczba $eapprox 2,7182$ jest straszliwie ważną stałą w matematyce i fizyce, ln oznacza logarytm (patrz wikipedia) o podstawie e.\ textbf{Uwaga o sin}: Wszędzie w tym tekście (jak i wszędzie indziej) $sin x$ oznacza sinus x w radianach, nie stopniach! $pi rad = 180deg$. To samo tyczy się pozostałych funkcji trygonometrycznych. item Zachodzą mądre wzory na sumę, różnicę, iloczyn oraz iloraz pochodnych. Weźmy funkcje różniczkowalne f,g i niech f', g' oznaczają ich pochodne, niech $cin mathbb{R}$ oznacza stałą. Wtedy: $$begin{array}{c c} (cf)' = cf' & \ (f+g)' = f'+g' & \ (f-g)' = f'-g' & \ (fg)' = fg' + f'g & \ (frac{f}{g})' = frac{f'g - fg'}{g^2} & hbox{ ma sens jeżeli }g(x)>0 forall_{xin mathbb{R}} end{array}$$ item begin{thm} Dana jest funkcja $f:mathbb{R} rightarrow mathbb{R}$. Jeżeli punkt x_0 jest minimum lokalnym (tj. istnieje $varepsilon > 0$, taki, że dla $xin (x_0 - varepsilon, x_0 + varepsilon) f(x) geq f(x_0)$). $$f'(x_0) = 0$$ Teza zachodzi również, gdy x_0 jest maksimum lokalnym. end{thm} end{enumerate} paragraph{Teoria do funkcji wypukłych} begin{enumerate} item begin{thm}[Rolle] Jeżeli f jest różniczkowalna, $a < b$ są liczbami rzeczywistymi oraz $f(a) = f(b)$ to $$hbox{ Istnieje }cin(a,b) f'(c) = 0$$ end{thm} item begin{thm}[Lagrange] Jeżeli f jest różniczkowalna zaś $a < b$ są liczbami rzeczywistymi to $$hbox{ Istnieje }cin(a,b) f'(c) = frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$ end{thm} dowod Niech $g(x):=f(x) - (x-a)frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Wtedy $$g(a) = f(a), g(b) = f(b) - (b-a)frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) = g(a)$$ Stosujemy tw. Rolle dla funkcji g i punktów a,b otrzymując $$hbox{ Istnieje }cin(a,b) g'(c) = 0$$ $$0 = g'(c) = f'(c) - left((x-a)frac{f(b) - f(a)}{b-a}right)'(c) = f'(c) - frac{f(b) - f(a)}{b- a}.$$ Zauważmy, że tw. Rolle jest wnioskiem z tw. Lagrange, ``wąż zjada własny ogon''. item begin{cor} Ustalmy $a < bin mathbb{R}$ oraz funkcję różniczkowalną $f:mathbb{R} rightarrow mathbb{R}$.\ Jeżeli $f'(x) geq 0$ dla wszystkich $xin (a,b)$ to funkcja f jest niemalejąca na przedziale (a,b). end{cor} dowod Weźmy dowolne $c,d: a leq c < d leq b$. Z tw. Lagrange wiemy, że $$frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(s)$$ gdzie s jest pewnym punktem (c,d). Wiemy, że $d-c >0$ i $f'(s) geq 0$, stąd $f(d) - f(c) geq 0$. item Funkcja jest emph{wypukła} na przedziale $[a,b]$, jeżeli dla wszystkich $c,din [a,b]$ odcinek $(c,f(c))---(d, f(d))$ leży ponad wykresem funkcji f. item Podstawowym faktem dotyczącym funkcji wypukłych jest begin{thm}[Nierówność Jensena] Jeżeli funkcja f jest wypukła na przedziale $[c,d]$, $x_1,dots,x_nin [c,d]$, liczby $a_1,dots,a_n> 0$ oraz $a_1 + dots + a_n = 1$ to $$sum_{i=1}^n a_if(x_i) geq fleft(sum_{i=1}^n a_ix_iright)$$ end{thm} item begin{cor} Ustalmy $a < bin mathbb{R}$. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna i jej pochodna jest różniczkowalna oraz $forall_{xin(a,b)} f''(x) geq 0$ to funkcja f jest wypukła (i możemy stosować nierówność Jensena:).\ emph{Uwaga:} Jeżeli mamy mocniejszą nierówność $f'' > 0$, to równość w nierówności Jensena zachodzi tylko, gdy $x_1 = x_2 = dots = x_n$. end{cor} end{enumerate} paragraph{Zadania na pochodne} begin{enumerate} item Dla liczb dodatnich $a_1, dots, a_n$ pokazać nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną: $$frac{a_1 + dots +a_n}{n} geq sqrt[n]{a_1dots a_n}$$

bez użycia Jensena, za to z użyciem pochodnych. item Uzasadnić, że dla $xin [0, pi/2]$ zachodzi $$xfrac{2}{pi} leq sin x leq x$$ item Liczby x,y,z są nieujemne i sumują się do $pi/2$. Pokazać, że $$1leq sin x + sin y + sin z leq frac{pi}{2}$$ por. zadanie 1. z Jensena. item Obliczyć maksimum funkcji $x^{1/x}$ dla $xin [1, infty)$. item Udowodnić, że dla wszystkich $nin mathbb{Z}_+$, $xgeq 0$ zachodzi $$e^x geq 1 + x + frac{x^2}{2} + dots + frac{x^n}{n!}$$ emph{Na AM udowadnia się, że $e^x = lim_{n rightarrow infty} 1 + x + x^2/2 + dots + x^n/n!$.} end{enumerate} paragraph{Zadania z Jensena} begin{enumerate} item Liczby x,y,z są nieujemne i sumują się do $pi/2$. Pokazać, że $$sin x + sin y + sin z leq frac{3}{2}$$ item Dla liczb dodatnich $a_1, dots, a_n$ pokazać nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną: $$frac{a_1 + dots +a_n}{n} geq sqrt[n]{a_1dots a_n}$$ end{enumerate} end{document}