Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 19:52 -

** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadania2.tex % Created: wto lut 02 01:00 2010 C % Last Change: wto lut 02 01:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Dzień drugi} setcounter{enumi}{3} setcounter{enumii}{3} setcounter{enumiii}{3} begin{enumerate} setcounter{enumi}{3} setcounter{enumii}{3} setcounter{enumiii}{3} item Czy istnieje liczba całkowita postaci $$444dots 4443$$ która jest podzielna przez 13? item Trójkąt ABC jest ostrokątny, a jego wysokości przecinają się w H. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABH, BCH, CAH mają równe promienie. item Niech n będzie liczbą naturalną taką, że $sqrt{1 + 12n^2}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że $$2 + 2sqrt{1 + 12n^2}$$ jest kwadratem liczby całkowitej. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: zadania2.tex % Created: wto lut 02 01:00 2010 C % Last Change: wto lut 02 01:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Dzień drugi} setcounter{enumi}{3} setcounter{enumii}{3} setcounter{enumiii}{3} begin{enumerate} setcounter{enumi}{3} setcounter{enumii}{3} setcounter{enumiii}{3} item Czy istnieje liczba całkowita postaci $$444dots 4443$$ która jest podzielna przez 13? rozw Taka liczba nie istnieje.\ Załóżmy, że $13 | underbrace{4dots 4}_k 3$.\ Zachodzi $13| 1underbrace{4dots 4}_k 3 = 13cdot underbrace{1dots 1}_{k+1}$, a więc $$13 | 1underbrace{4dots 4}_k 3 - underbrace{4dots 4}_k 3 = 10^{k+1}$$ Sprzeczność. item Trójkąt ABC jest ostrokątny, a jego wysokości przecinają się w H. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABH, BCH, CAH mają równe promienie. begin{lem} Odbicie ortocentrum w trójkącie względem dowolnego z boków leży na okręgu opisanym na trójkącie. end{lem} textbf{Dowód lematu:} Dowodzę tylko dla trójkąta ostrokątnego, dla innych dowód jest podobny.\ Wprowadźmy oznaczenia jak w zadaniu i niech H' oznacza odbicie H względem boku AB (bez straty ogólności). Obliczam $$angle AH'B +angle ACB= angle AHB + angle ACB = 180deg$$ co dowodzi tezy. rozw Niech o oznacza okrąg opisany na ABC.\ Odbicia punktów A, B, H względem AB leżą na o. Tym samym punkty A,B,H leżą na okręgu będącym odbiciem symetrycznym o względem AB, co już dowodzi tezy. item Niech n będzie liczbą naturalną taką, że $sqrt{1 + 12n^2}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że $$2 + 2sqrt{1 + 12n^2}$$ jest kwadratem liczby całkowitej. rozw Zauważmy, że liczba $sqrt{1 + 12n^2}$ jest nieparzysta, gdyż jej kwadrat jest nieparzysty.\ Rozważmy (emph{trik, trik :)}) równanie $$x^2 - x - 3n^2 = 0$$ Równanie to ma pierwiastki $$frac{1 pm sqrt{1 + 12n^2}}{2}$$ będące liczbami całkowitymi. Niech $$x_0 := frac{1 + sqrt{1 + 12n^2}}{2}, x_0in mathbb{Z}$$

Teza orzeka, że $4x_0$ ma być kwadratem liczby całkowitej. Udowodnimy, że x_0 jest kwadratem liczby całkowitej, co już dowodzi tezy. $$x_0^2 - x_0 - 3n^2 = 0, x_0(x_0 - 1) = 3n^2$$ Liczby $x_0, x_0 - 1$ są względnie pierwsze i nieujemne, więc z rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że dla pewnych $k,lin mathbb{Z}$: $$x_0 =3k^2 hbox{ i } x_0 - 1 = l^2 hbox{ lub } x_0 =k^2 hbox{ i } x_0 - 1 = 3l^2$$ Jeżeliby $x_0 - 1 = 3k^2 hbox{ i } x_0 - 1 = l^2$ to $$3 | x_0 = l^2 + 1$$ czyli $l^2 equiv 2 mod 3$, sprzeczność, kwadraty nie dają takich reszt.\ Ostatecznie $x_ 0 = k^2 hbox{ i } x_0 - 1 = 3l^2$, co dowodzi tezy.\ emph{ Osobom zainteresowanym, czy istnieje dużo liczb naturalnych n takich, że $1 + 12n^2$ jest kwadratem liczby naturalnej, polecam poczytać o Równaniu Pella.} end{enumerate} end{document}