
Zadania PDF.

Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadania1.tex % Created: wto lut 02 12:00 2010 C % Last Change: wto lut 02 12:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Dzień pierwszy} begin{enumerate} item Czy jest możliwy podział zbioru $left{ 1,2,dots,33 right}$ na jedenaście zbiorów 3-elementowych, tak, że w każdym zbiorze jeden z elementów jest równy sumie pozostałych dwóch? item Niech $triangle ABC$ będzie prostokątny z $angle ABC = 90deg$ oraz $|AB| > |BC|$, niech $Gamma$ będzie półokręgiem o średnicy AB, który leży po tej samej stronie AB co punkt C. Niech P będzie punktem na $Gamma$, takim, że $|BP| = |BC|$ i niech Q będzie punktem na AB takim, że $|AP| = |AQ|$. Udowodnij, że środek CQ leży na $Gamma$. item Znajdź wszystkie funkcje $f:mathbb{Z}_+ rightarrow mathbb{Z}_+$ spełniające równanie $$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$ dla wszystkich $nin mathbb{Z}_+$. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: zadania1.tex % Created: wto lut 02 12:00 2010 C % Last Change: wto lut 02 12:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Dzień pierwszy} begin{enumerate} item Czy jest możliwy podział zbioru $left{ 1,2,dots,33 right}$ na jedenaście zbiorów 3-elementowych, tak, że w każdym zbiorze jeden z elementów jest równy sumie pozostałych dwóch? rozw Taki podział nie jest możliwy.\ Założmy, że mamy podział, spełniający warunki. Wtedy w każdym zbiorze suma liczb jest parzysta, a więc suma wszystkich liczb jest parzysta. Suma liczb $1,2,dots,33$ jest równa $17cdot 33$, a więc jest nieparzysta, sprzeczność. item Niech $triangle ABC$ będzie prostokątny z $angle ABC = 90deg$ oraz $|AB| > |BC|$, niech $Gamma$ będzie półokręgiem o średnicy AB, który leży po tej samej stronie AB co punkt C. Niech P będzie punktem na $Gamma$, takim, że $|BP| = |BC|$ i niech Q będzie punktem na AB takim, że $|AP| = |AQ|$. Udowodnij, że środek CQ leży na $Gamma$. rozw Trójkąty $triangle APQ$ i $triangle BPC$ są równoramienne oraz $$angle CBP = 90deg - angle PBA = angle PAB$$ tak więc $triangle APQ equiv triangle BPC$.\ W szczególności $angle APQ = angle BPC$, a więc $$angle CBQ + angle QPC = 90deg + angle QPB + angle BPC = 90deg + angle QPB + angle APQ = 90deg + angle APB = 180deg$$ Tak więc punkty B, C, P, Q leżą na jednym okręgu, o środku O leżącym w połowie boku CQ. Obliczam $$angle BOP + angle PAB = 2angle BCP + angle CBP = 180deg$$ Punkty A, P, O, B leżą na okręgu o średnicy AB, środek odcinka CQ leży na okręgu o średnicy AB, a skoro leży on po tej samej stronie AB co punkt C, to leży on na $Gamma$. item Znajdź wszystkie funkcje $f:mathbb{Z}_+ rightarrow mathbb{Z}_+$ spełniające równanie $$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$

dla wszystkich $nin mathbb{Z}_+$. rozw Dla skrótu złożenie funkcji f k razy będę oznaczać $f^{(k)}$.\ Po pierwsze, zauważmy, że funkcja f jest różnowartościowa: $$f(n) = f(m) Rightarrow 3n = f(n) + f^{(2)}(n) + f^{(3)}(n) = f(m) + f^{(2)}(m) + f^{(3)}(m) = 3m$$ Przez prostą indukcję udowodnię, że $f(k) = k$.\ begin{enumerate} item Dla $k=1$: $$3 = f^{(3)}(1) + f^{(2)}(1) + f(1) geq 1 + 1 + 1$$ a więc zachodzą równości i $f(1) = 1$. item Krok indukcyjny.\ Zauważmy, że $f(k) geq k$ gdyż f jest różnowartościowa. Stąd wynika $f^{(2)}(k) geq k$, a następnie $f^{(3)}(k) geq k$. $$3k = f(k) + f^{(2)}(k) + f^{(3)}(k) geq k + k + k$$ a więc zachodzą równości, w szczególności $f(k) = k$. end{enumerate} end{enumerate} end{document}