** **
 Zadania PDF.

Kółko i zadania przygotował Mateusz Jocz -- dziękuję :)

Źródło zadań w texu.

```
documentclass[10pt]{article}  usepackage{amssymb}  usepackage{amsmath}  textwidth
16cm  textheight 24cm  oddsidemargin 0cm  topmargin 0pt  headheight 0pt  headsep 0pt
usepackage[polish]{babel}  usepackage[utf8]{inputenc}  usepackage[T1]{fontenc}
usepackage{import}  %usepackage{MnSymbol}  %
-------------------------------------------------------------  vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small  hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small  %
THEOREMS -----------------------------------------------------  newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]
 newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}  newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja}  newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}  newtheorem{useless}[thm]{}    defmb#1{mathbb{#1}}
defrozw{textbf{Rozwiązanie}: \}  defdeg{^{circ}}  defsource#1{$ $\Źródło: #1}
defo{operatorname{ord}}    subimport{../}{style}    begin{document}  section{Powrót
wielomianów}    paragraph{Teoria}  begin{enumerate}      item Jeżeli wielomian $W$ ma
współczynniki całkowite to          $$a - b | W(a) - W(b)$$          dla wszystkich liczb całkowitych
$aneq b$.      item Dla każdego $x_0$ i każdego wielomianu $W(x)$ zachodzi
$W(x)=(x-x_0)P(x)+W(x_0)$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem, który jest          textbf{różny dla
różnych $x_0$}. Ponadto jeżeli $W(x)$ miało          współczynniki całkowite i $x_0$ jest
całkowite, to $P(x)$ ma          współczynniki całkowite. (Twierdzenie B`ezouta)      item Niech
$x_1, x_2, dots, x_n$ będą pierwiastkami wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + dots + a_1 x
+ a_0,; a_nneq 0$ o współczynnikach zespolonych (w szczególności także rzeczywistych).
Wówczas prawdziwe są wzory:     [  begin{cases} x_1 + x_2 + dots + x_{n-1} + x_n =
tfrac{-a_{n-1}}{a_n} \ x_1 x_2 + dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + dots + x_2 x_n + dots + x_{n-1} x_n
```

= tfrac{a_{n-2}}{a_n} \ vdots \ x_1 x_2 dots x_n = (-1)^n tfrac{a_0}{a_n} end{cases}] nazywane wzorami Vi`ete'a. end{enumerate} paragraph{Podzielność} begin{enumerate} item Dany jest wielomian całkowitoliczbowy $P(x)$, taki, że $3|P(7)$ oraz $7|P(3)$. Wykaż, że $21|P(10)$. source{Staszic} item Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia warunki: $$17|W(15), 13|W(0), 9|W(11)$$ Pokazać, że 1989|W(1001). source{Staszic} end{enumerate} paragraph{Wielomian pomocniczy} begin{enumerate} item Rozwiązać układ równań w rzeczywistych a, b, c, d : [begin{cases} a + b + c + d = 4 \ ab + ac + ad + bc + bd + cd = -1 \ abc + abd + acd + bcd = -16 \abcd = -12 end{cases}] source{Staszic} item Rozwiązać układ równań w liczbach rzeczywistych: [begin{cases} x + y + z = 2 \ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \ x^3 + y^3 + z^3 = 20 end{cases}] item Liczby x,y,z spełniają równości: $x+y+z=a$, $frac{1}{x} +frac{1}{y} +frac{1}{z} = frac{1}{a}$. Udowodnić, że przynajmniej jedna z nich jest równa a. item Suma trzech liczb całkowitych u,v,w jest równa zeru. Udowodnij, że liczba $2u^4+2v^4+2w^4$ jest kwadratem liczby całkowitej. item Rozwiązać układ równań w dodatnich a, b, c : [begin{cases}ab + bc + ac = 12 \ a + b + c + 2 = abc end{cases}] source{Staszic} item Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równania: [begin{cases} a + b + c + d = -3 \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \ abc + abd + acd + bcd = 3 end{cases}] Pokazać, że istnieje taka liczba rzeczywista M, ze $M geq abcd geq -2$. source{Staszic} end{enumerate} paragraph{Różności} begin{enumerate} item Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity. source{LVIII OM II^{o}} item Dany jest wielomian $W(x)=x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniających warunek: Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p. Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której: [W(m)=W(m+1)=0] source{LVI OM II^{o}} item Znaleźć reszty z dzielenia wielomianu $(x^2- x - 1)^{2008}$ przez wielomiany: $x-1$ i x^2-1. source{Staszic} item Znajdź wszystkie wielomiany $p(x)$, dla których zachodzi następująca tożsamość: [(x-26)p(x)=xp(x-1)] dla każdej liczby rzeczywistej x. item Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y równość: [P(x^2-y^2)=P(x+y)P(x-y)] source{Staszic} end{enumerate} end{document}